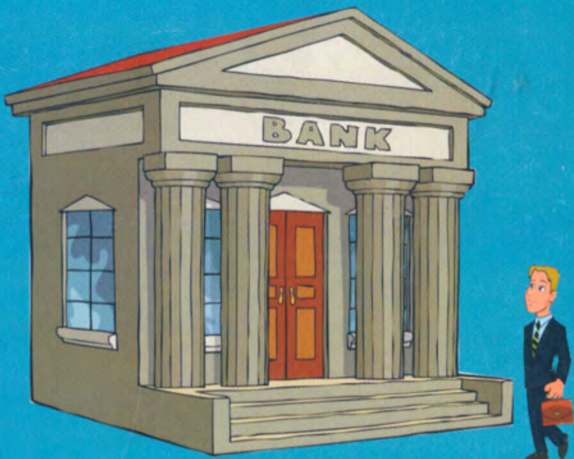
Н.А. Шихова

Задачи с экономическим содержанием



К концу года на счете:

$$1\,536\,000\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^3=\frac{1\,536\,000\cdot9\cdot9\cdot9}{8\cdot8\cdot8}=$$
$$=\frac{192\,000\cdot9\cdot9\cdot9}{8\cdot8}=\frac{24\,000\cdot9\cdot9\cdot9}{8}=$$
$$3\,000\cdot9\cdot9\cdot9=27\,000\cdot81=2\,187\,000$$

ИЛЕКСА

Н.А. Шихова

Задачи с экономическим содержанием

Москва
ИЛЕКСА
2022

УДК 372.8:51:330.4
ББК 22.1:74.262+65.9(2)26
Ш55

Шихова Н.А.
Ш55 Задачи с экономическим содержанием. — М.: ИЛЕКСА, 2022. — 78 с.
ISBN 978-5-89237-462-0

Данное учебное пособие предназначено для подготовки к реше-нию задач с экономическим содержанием, входящих в варианты профильного ЕГЭ по математике под номером 17.

Решая задачи с экономическим содержанием, приходится выполнять сложные вычисления, но на экзамене пользоваться калькулятором нельзя. Вычислительные ошибки встречаются даже у сильных школьников. Чтобы их предупредить, в данном пособии особенное внимание уделяется технике вычислений.

В первой главе пособия приведены базовые сведения о методах оптимизации вычислений и преобразований, а также работы с процентами. Эта часть завершается упражнениями, которые можно назвать диагностическими.

Во второй главе решаются задачи о вкладах и кредитах. Рассмотрены две основные схемы выплаты кредитов — аннуитетные и дифференцированные платежи.

В третьей главе рассматриваются задачи на оптимальный выбор.

Завершается пособие контрольной работой.

Пособие предназначено для учащихся, готовящихся к сдаче профильного ЕГЭ, учителей, преподавателей колледжей и студентов педагогических вузов.

УДК 372.8:51:330.4
ББК 22.1:74.262+65.9(2)26

ISBN 978-5-89237-462-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это учебное пособие предназначено для подготовки к решению задач с экономическим содержанием — такие задачи входят в варианты профильного ЕГЭ по математике под номером 17.

В первой главе приведены базовые сведения о методах оптимизации вычислений и преобразований, а также работы с процентами. Эта часть завершается упражнениями, которые можно назвать диагностическими. Если ты не можешь справиться с большинством этих упражнений, то, скорее всего, тебе лучше пересмотреть стратегию подготовки к экзамену. Подготовку к решению задачи 17 пока следует отложить, глубже проработать базовые математические темы, одновременно тренируясь решать задачи 1–14 экзамена.

Во второй главе рассматриваются задачи о вкладах и кредитах. Рассмотрены две основные схемы выплаты кредитов — аннуитетные и дифференцированные платежи, — однако акцент сделан не на том, чтобы заучить несколько стандартных моделей, а на том, чтобы научиться строить модель задачи самостоятельно. Это позволит решать нестандартные задачи.

В третьей главе рассматриваются задачи на оптимальный выбор. В таких задачах заданы некоторые условия и нужно выбрать наилучшее решение.

Завершается пособие контрольной работой.

ГЛАВА I. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1.1. Секретные сведения о процентах

Всех нас в младших классах учили работать с процентами. Мы рисовали картинки, составляли пропорции и находили неизвестное. Разные типы примеров получали разные названия — находить число по проценту, находить процент по числу и т.п. А еще в младшей школе учили: если в задаче сказано «увеличилось на столько-то», то надо прибавлять, а если сказано «уменьшилось на столько-то», надо вычитать.

В старших классах пора работать с процентами по-взрослому. Работа с процентами обычно сводится к работе с дробями, а дроби гораздо удобнее умножать и делить, чем складывать и вычитать. Если в задаче сказано «увеличилось на столько-то процентов», или даже «уменьшилось на столько-то процентов», лучше умножать. Это не безусловный закон, как в начальной школе, а полезный совет. Взрослый человек, знающий математику, сам решит, в каких ситуациях этот совет лишний.

Допустим, пряник стоит a руб., и известно, что бублик на 100% дороже. Надо уметь сразу же находить цену бублика умножением: он стоит $2a$ руб. Если бублик на 200% дороже пряника, то к цене пряника нужно прибавить еще две его цены, всего три: бублик стоит $3a$ руб. Если бублик на 50% дороже пряника, то стоит $1,5a$ руб.

Бублик может быть дешевле пряника. Если дешевле на 100%, это бублик подозрительный — цена ему 0 руб. Если бублик дешевле пряника на 50%, то он дешевле наполовину и стоит $0,5a$ руб. И так далее.

Чтобы записывать такого типа выражения сразу же, существует специальная формула. Не заучивай ее наизусть и не подглядывай в шпаргалку, решая задачи. Каждый раз, когда в задаче нужно изменить величину на столько-то процентов, размышляй, на какой коэффициент нужно ее умножить. Если ты не можешь умножением выразить соотношение «на сколько-то процентов больше или меньше», значит, ты не очень хорошо освоил работу с процентами, не нарешав простых задач с процентами, берешься за сложную. Еще одна–две бездумно вызубренных формулы — и ты попадешь в ситуацию «все формулы знаю, а решить не могу». Лучше потренируйся на примерах.

Задание. Заполни таблицу про пряник ценой a руб. и бублик. Несколько ячеек уже заполнены.

На сколько процентов бублик дороже	Сколько стоит бублик	На сколько процентов бублик дешевле	Сколько стоит бублик
100		100	
200	$3a$	50	
50		10	$0{,}9a$
150		30	
30		11	
10		23	
12		12,2	
37		14,48	
34,56	$1{,}3456a$	34,56	$0{,}6544a$
14,5		23,73	
23,47		$11\frac{1}{9}$	
$11\frac{1}{9}$		$9\frac{1}{9}$	
$7\frac{9}{13}$	$\frac{14}{13}a$	$7\frac{9}{13}$	$\frac{12}{13}a$
$9\frac{1}{11}$		$14\frac{2}{7}$	
$14\frac{2}{7}$		$8\frac{1}{3}$	
x		y	

Вот справка для самоконтроля (а не правило для заучивания): увеличить число на $x\%$ — это все равно, что умножить его на $(1 + 0{,}01x)$; уменьшить число на $y\%$ — это все равно, что умножить его на $(1 - 0{,}01y)$.

Если задание оказалось трудным, надо потренироваться еще. Нарисуй такую же таблицу с произвольными числами и заполни ее; вверху должны быть числа попроще, а чем ниже, тем сложнее. Выполните задание вместе с товарищем и проверьте друг друга.

В следующих примерах, когда нужно увеличить или уменьшить число на сколько-то процентов, результат находят умножением.

Пример 1. В мае цена акции увеличилась на 20%, а в июне уменьшилась на 20%. Как изменилась цена акции за два месяца?

Решение. Обозначим x цену акции в апреле. Тогда в мае она стоила $1{,}2x$, а в июне — $1{,}2 \cdot 0{,}8x = 0{,}96x$. За два месяца цена снизилась на 4%.

Пример 2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После вычета налога Пантелей получает в кассе 30 450 р. Какова заработная плата Пантелея до вычета налога?

Решение. Обозначим x заработную плату Пантелея. После вычета 13% налога он получает $0{,}87x$. Составим уравнение $0{,}87x = 30\,450$ и решим его:

$$x = \frac{30\,450}{0{,}87}; \ x = 35\,000.$$

Пример 3. На экскурсию отправилась группа детей в сопровождении взрослых. Средний возраст всех людей в группе на 50% больше среднего возраста детей, а средний возраст взрослых — на 250% больше среднего возраста детей. Какой процент составляет число взрослых в группе?

Решение. Обозначим m число детей в группе, а n — число взрослых. Средний возраст детей обозначим x. В задаче требуется выразить в процентах отношение $\frac{n}{m+n}$ числа взрослых к числу всех участников экскурсии.

Средний возраст взрослых на 250% больше x и равен поэтому $3{,}5x$. Сумма возрастов всех детей равна mx, а сумма возрастов всех взрослых — $3{,}5nx$. Это позволяет выразить средний возраст всех участников экскурсии:

$$\frac{mx + 3{,}5nx}{m+n}.$$

Он на 50% больше среднего возраста детей; запишем это условие в виде уравнения:

$$\frac{mx+3{,}5nx}{m+n}=1{,}5x.$$

Разделим обе части уравнения на положительное число x и упростим:

$$\frac{m+3{,}5n}{m+n}=1{,}5;$$

$$m+3{,}5n=1{,}5m+1{,}5n;$$
$$2n=0{,}5m;$$
$$4n=m.$$

Теперь можно вычислить отношение $\frac{n}{m+n}$ числа взрослых к числу всех участников экскурсии:

$$\frac{n}{m+n}=\frac{n}{4n+n}=\frac{1}{5}.$$

Число взрослых составляет 20% от числа всех участников экскурсии.

Пример 4. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 50 руб., второго сорта – по 40 руб., третьего сорта – по 30 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 3250 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок 2-го сорта продал садовод?

Решение. Массы, которые отличаются на одинаковое число процентов, отличаются в одно и то же число раз. Обозначим это число q, а массу яблок 3-го сорта обозначим x. Тогда яблок 2-го сорта было qx, а 1-го сорта — q^2x. В задаче требуется найти qx. Составим систему уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} q^2x+qx+x=91; \\ 50q^2x+40qx+30x=3250. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x и подставим во второе:

$$\begin{cases} x = \dfrac{91}{q^2+q+1}; \\ \left(50q^2+40q+30\right)\cdot\dfrac{91}{q^2+q+1} = 3250. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы. Первым делом избавимся от дробей:

$$\left(50q^2+40q+30\right)\cdot\frac{91}{q^2+q+1} = 3250;$$

$$\left(50q^2+40q+30\right)\cdot 91 = 3250\cdot\left(q^2+q+1\right).$$

Скобки сразу раскрывать не будем, а сначала разделим обе части на то, на что хорошо делится:

$$\left(5q^2+4q+3\right)\cdot 91 = 325\cdot\left(q^2+q+1\right);$$

$$\left(5q^2+4q+3\right)\cdot 7 = 25\cdot\left(q^2+q+1\right);$$

$$35q^2+28q+21 = 25q^2+25q+25;$$

$$10q^2+3q-4=0;$$

$$q_1=-0{,}8;\ q_2=0{,}5.$$

Отрицательное значение не подходит по смыслу задачи; значит, $q = 0{,}5$. Сосчитаем, сколько было яблок 2-го сорта исходя из первого уравнения системы:

$$qx = \frac{91q}{q^2+q+1} = \frac{91\cdot 0{,}5}{0{,}5^2+0{,}5+1} = \frac{91\cdot 2}{1+2+4} = 13\cdot 2 = 26.$$

Ответ. 26 кг.

1.2. Упрощение вычислений

В задаче с экономическим содержанием иногда попадаются сложные вычисления, явно не устные. Калькулятором пользоваться на экзамене нельзя, технике вычислений на уроках не уделяют внимания, поэтому многие не доводят решение до конца, запутавшись в числах как в трех соснах. А тот, кто не запутал, все равно часто делает арифметические ошибки.

Поэтому нужно освоить полезные приемы счета и преобразований. В книжке мы будем отмечать их специальными значками.

1. $\frac{A}{B}$ Обыкновенное чудо.

Первый прием — «обыкновенное чудо». Почему обыкновенное? Потому что выполняется переход от десятичных дробей к обыкновенным. Почему чудо? Потому что числа чудесным образом уменьшаются. Арифметических ошибок будет гораздо меньше.

Пример 5. Вычислить $3624 \cdot 1{,}375$.

Начало решения. Знак умножения — не повод засучить рукава и умножать четырехзначные числа столбиком, это ошибкоопасно. Десятичную дробь лучше представить в виде обыкновенной:

$$3624 \cdot 1{,}375 = 3624 \cdot \frac{11}{8}.$$

Видно, что число 3624 можно не умножать на четырехзначное число 1,375, а достаточно умножить на 11 и разделить на 8.

Эти два действия нужно выполнять в правильном порядке.

2. 1) : 2) × Разделяй и умножай.

Умножение и деление можно выполнять в любом порядке, но часто удобнее сначала делить, а потом умножать.

Продолжение примера 5. В выражении $\frac{3624 \cdot 11}{8}$ не начинай с умножения, лучше сначала разделить (числитель и знаменатель на одно и то же число — сократить):

$$\frac{3624 \cdot 11}{8} = \frac{453 \cdot 11}{1} = 4983.$$

3. Отложи на завтра то, что необязательно делать сегодня.

Вычисления часто удобно откладывать до последнего в надежде на то, что позднее обнаружится более эффективный путь решения.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{x}{13} = \frac{7{,}2 - x}{5}.$$

Решение. Начнем решать по свойству пропорции:

$$5x = 13 \cdot 7{,}2 - 13x.$$

Следующим действием надо все члены с x перенести влево, а справа оставить произведение $13 \cdot 7{,}2$. Вычислять произведение сразу не надо, вдруг повезет и это вовсе не понадобится. Запишем так:

$$18x = 13 \cdot 7{,}2.$$

Отложив умножение, мы получили возможность применить прием «разделяй и умножай». Сначала разделим на 18, тогда для умножения останутся числа поменьше:

$$x = 13 \cdot 0{,}4 = 5{,}2.$$

4. $A \cdot B$ Разложи.

В предыдущем примере мы видели, что умножение лучше откладывать в надежде на то, что удастся сначала разделить нацело, а потом уж умножать числа поменьше. Бывает полезно продвинуться еще дальше по этому пути и представлять целые числа в виде произведения множителей.

Прием хорошо работает для сокращения дробей, упрощения уравнений и извлечения корней.

Пример 7. Вычислить $\sqrt{53^2 - 45^2}$.

Решение 1 (неэффективное). Считаем по действиям в столбик:

1) $53^2 = 2809$;

2) $45^2 = 2025$;

3) $\sqrt{53^2 - 45^2} = \sqrt{784} \ldots$

Извлекать корень из 784 не очень удобно, если ты наизусть не помнишь таблицу квадратов. Если корень извлекается нацело, то можно угадать. Прикинем, что результат получится меньше 30 и больше 20 (ведь $20^2 < 784 < 30^2$), а тогда цифра десятков — 2. Можно угадать и цифру единиц: ее квадрат оканчивается на 4; а значит, цифра единиц — 2 или 8. Остается проверить умножением в столбик двух кандидатов: 22 и 28. Подойдёт 28, ведь $28^2 = 784$.

Другой способ — разложить 784 на множители и извлекать корни из множителей:

$$\sqrt{784} = \sqrt{4 \cdot 196} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49} = 2 \cdot 2 \cdot 7.$$

Еще лучше было бы сразу начать с разложения на множители, как в следующем решении.

Решение 2.

$$\sqrt{53^2-45^2}=\sqrt{(53-45)(53+45)}=$$
$$=\sqrt{8\cdot 98}=\sqrt{4\cdot 2\cdot 2\cdot 49}=2\cdot 2\cdot 7.$$

5. $\boxed{\frac{A}{B}\cdot B}$ **Без дробей.** Если в вычислениях участвуют двухэтажные дроби или если в уравнениях дробные коэффициенты, часто бывает полезно до других действий избавиться от дробей.

Пример 8. Решить уравнение

$$x^2-\frac{7}{6}x-\frac{10}{3}=0.$$

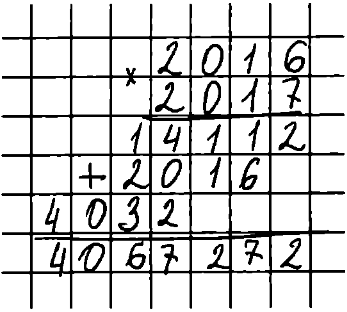
Начало решения. Это обычное квадратное уравнение; многие начинают его решать с вычисления дискриминанта. Но лучше избавиться от дробей, для чего умножить обе части уравнения на 6. Получится тоже квадратное уравнение

$$6x^2-7x-20=0.$$

Решая такие уравнения с целыми коэффициентами, ошибаются реже.

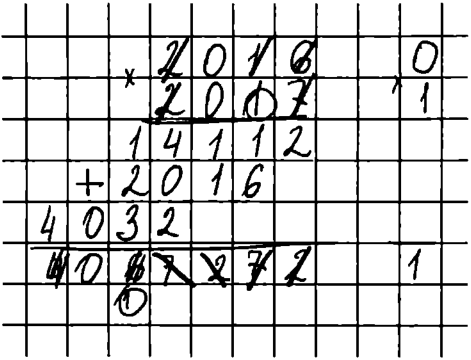
6. Вычеркивание девяток. Это способ проверки вычислений по остаткам от деления на 9. Если не удалось оптимизировать вычисления и приходится считать в столбик, проверяй себя вычеркиванием девяток.

Пример 9. Корней умножал в столбик два числа 2016 и 2017:



Верно ли он умножил? Прикидка ничего плохого не показывает: 2016 × 2017 ≈ 2000 × 2000=4000000 ≈ 4067272.

Проверим, вычислив остатки от деления на 9 вычеркиванием и записав их справа от столбика умножения:



В числе 2016 вычеркнем цифры 2, 1, 6, которые в сумме дают 9, оставшийся нуль запишем правее числа 2016. В числе 2017 вычеркнем цифры 2 и 7, сложим оставшиеся 0 и 1, их сумму 1 запишем правее числа 2017. Произведение 0 и 1 равно 0, а это значит, что остаток от деления произведения 2016 × 2017 на 9 должен быть равен нулю. Теперь «вычеркнем девятки» в произведении: два раза пару цифр 2 и 7, а также вычеркнем две цифры 4 и 6, записав вместо них единицу (в кружочке). Оказалось, что остаток равен 1 и вовсе не равен 0; а это значит, что где-то в вычислениях допущена ошибка.

Как этот метод работает, смотри ролик: https://youtube.cxG0D2d45QQ. Почему этот метод работает, объясняется в конце книжки.

Если уж на экзамене пришлось считать в столбик, проверяй себя не пристальным разглядыванием столбиков, а вычеркиванием девяток, — это быстрее и надежнее.

Вычеркиванием девяток можно проверять не только умножение, но еще сложение и вычитание. Деление так проверить нельзя.

1.3. С чего начать?

Сначала оцени свои силы. Пора ли тебе готовиться к решению задач с экономическим содержанием или надо повторить базовые темы? Если ты не можешь решить большинство следующих задач, имеет смысл изменить стратегию подготовки к экзамену — сначала проработать темы «проценты» и «графики уравнений».

Задача 1.

Примени прием «вычеркивание девяток» и проверь следующие равенства, выпиши номера неверных:

а) 1) 5 260 265 – 4 504 597 = 755 668;
2) 5 260 265 + 4 504 597 = 9 754 862;
3) 5 260 265 · 237 = 1 245 682 805;
4) 5 260 265 · 237 = 1 246 682 805.

б) 1) 5 982 347 – 4 947 349 = 1 034 998;
2) 5 982 347 + 4 947 349 = 10 929 696;
3) 5 982 347 · 237 = 1 437 816 239;
4) 5 982 347 · 28 = 167 505 726.

Задача 2. Пряник стоит *a* р. Сколько стоит бублик, если:

а) бублик на 15% дешевле пряника;
бублик на 16% дороже пряника;
пряник на 17% дешевле бублика;
пряник на 18% дороже бублика?

б) бублик на 23% дороже пряника;
бублик на 24% дешевле пряника;
пряник на 26% дороже бублика;
пряник на 27% дешевле бублика?

Задача 3. а) В мае самокат стоил 3600 р., в сентябре его цена снизилась на 10% , а в декабре — еще на 15% . Сколько стал стоить самокат после снижения цены в декабре?

б) В мае палатка стоила 4800 р., в сентябре ее цена снизилась на 15% , а в декабре — еще на 10% . Сколько стала стоить палатка после снижения цены в декабре?

Задача 4. а) Пантелей часто делает покупки в одном и том же интернет-магазине, и поэтому магазин предоставил ему скидку в 17% на все товары. Пантелей купил книги на сумму 581 р. Сколько стоили эти книги без скидки?

б) Корней часто делает покупки в одном и том же интернет-магазине, и поэтому магазин предоставил ему скидку в 23% на все товары. Корней купил книги на сумму 616 р. Сколько стоили эти книги без скидки?

Задача 5. а) При оплате через платежный терминал снимается комиссия 6%. Терминал принимает только бумажные купюры достоинством не менее 10 р. Пантелею нужно заплатить не менее 400 р. за пользование интернетом. Какую минимальную сумму ему нужно внести?

б) При оплате через платежный терминал снимается комиссия 6%. Терминал принимает только бумажные купюры достоинством не менее 10 р. Корнею нужно заплатить не менее 600 р. за пользование интернетом. Какую минимальную сумму ему нужно внести?

Задача 6. а) Пантелей положил на депозит в банке 50 000 р. Через год сумма на его счете увеличилась на $p\%$, а еще через год — опять на $p\%$. После этого у Пантелея на счете стало 59405 р. Сколько процентов годовых начислял банк по вкладу?

б) Корней положил на депозит в банке 50 000 р. Через год сумма на его счете увеличилась на $p\%$, а еще через год — опять на $p\%$. После этого у Пантелея на счете стало 57245 р. Сколько процентов годовых начислял банк по вкладу?

Задача 7. а) 1 февраля акции компании «Пряничный домик» подорожали на некоторое число процентов, а 1 марта — подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 1 процент дешевле, чем в конце января. На сколько процентов подорожали акции 1 февраля?

б) 1 февраля акции компании «Пряничный домик» подешевели на некоторое число процентов, а 1 марта — подорожали на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 1 процент дешевле, чем в конце января. На сколько процентов подорожали акции 1 февраля?

Задача 8. а) 13 мячей на 9% легче палатки. На сколько процентов 15 мячей тяжелей палатки?

б) 19 мячей на 5% легче палатки. На сколько процентов 23 мяча тяжелей палатки?

Задача 9. а) В классе учатся мальчики и девочки. Если бы мальчиков было на 20% больше, то число всех учеников в классе выросло бы на 8%. На сколько процентов увеличится число всех учеников в классе, если девочек станет на 20% больше?

а) В классе учатся мальчики и девочки. Если бы мальчиков было на 20% меньше, то число всех учеников в классе снизилось бы на 12%. На сколько процентов увеличится число всех учеников в классе, если девочек станет на 20% больше?

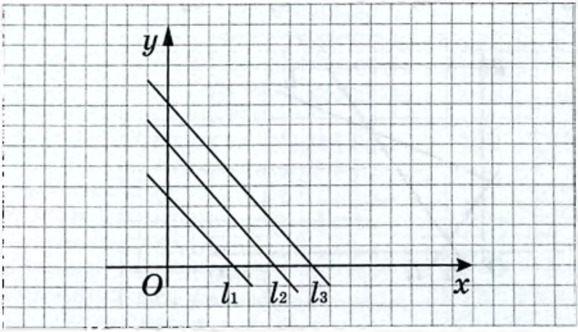
Задача 10. а) Целый день садовод продавал на рынке яблоки, груши и сливы. Если бы он продал яблок на 40% больше, то его выручка была бы больше на 18%. Если бы он продал слив вдвое больше, то выручка увеличилась бы на 30%. Сколько процентов от общей выручки принесли садоводу груши?

б) Целый день садовод продавал на рынке яблоки, груши и сливы. Если бы он продал яблок на 20% больше, то его выручка была бы больше на 11%. Если бы он продал слив вдвое больше, то выручка увеличилась бы на 15%. Сколько процентов от общей выручки принесли садоводу груши?

Задача 11. а) В прошлом году Пантелей приобрел акции двух компаний — «Аз» и «Буки» — на сумму 25 000 р. В этом году стоимость акций выросла: акции «Аз» подорожали на 10%, акции «Буки» — на 15%, и теперь все акции Пантелея вместе стоят 27650 р. А сколько теперь стоят принадлежащие ему акции «Аз»?

б) В прошлом году Корней приобрел акции двух компаний — «Аз» и «Буки» — на сумму 30 000 р. В этом году стоимость акций выросла: акции «Аз» подорожали на 10%, акции «Буки» — на 5%, и теперь все акции Корнея вместе стоят 32750 р. А сколько теперь стоят принадлежащие ему акции «Аз»?

Задача 12. На рисунке без точного соблюдения масштаба изображены эскизы графиков трех линейных уравнений. Укажи, какой из прямых l_1, l_2, l_3 соответствует уравнение:



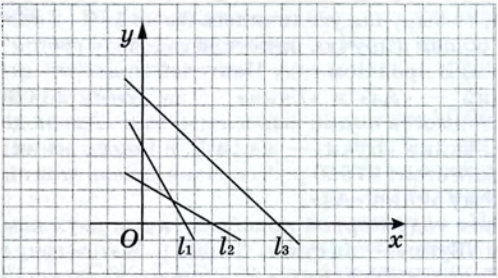
а) 1) $4x + 3y = 17$;
2) $4x + 3y = 11$;
3) $4x + 3y = 22$;

б) 1) $6x + 5y = 55$;
2) $6x + 5y = 28$;
3) $6x+5y = 43$.

Задача 13. На рисунке без точного соблюдения масштаба изображены эскизы графиков трех линейных уравнений. Укажи, какой из прямых l_1, l_2, l_3 соответствует уравнение:

а) 1) $4x + 3y = 11$;
2) $3x + 4y = 11$;
3) $x + y = 5$;

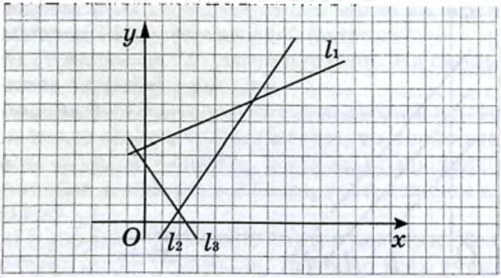
б) 1) $2x + 3y = 7$;
2) $3x + 2y = 7$;
3) $x + y = 4$.



Задача 14. На рисунке без точного соблюдения масштаба изображены эскизы графиков трех линейных уравнений. Укажи, какой из прямых l_1, l_2, l_3 соответствует уравнение:

а) 1) $y + 2x - 4 = 0$;
2) $2y - x - 7 = 0$;
3) $y - 2x + 3 = 0$;

б) 1) $5y - 3x - 25 = 0$;
2) $3y - 5x + 8 = 0$;
3) $5x + 3y - 16 = 0$.

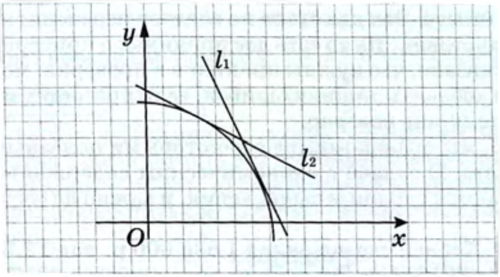


Задача 15. На рисунке без точного соблюдения масштаба изображены эскизы четверти окружности и графиков двух касательных к ней. Укажи, какой из касательных l_1, l_2 соответствует уравнение:

а) 1) $3x + 4y = 50$;
2) $4x + 3y = 50$;

б) 1) $15x + 8y = 578$;
2) $15y + 8x = 578$.

Найди радиус окружности.



ГЛАВА II. ЗАДАЧИ О ВКЛАДАХ И КРЕДИТАХ

2.1. Простые задачи о банковских вкладах

Для начала мы решим пару простых задач о банковских вкладах, чтобы освоиться с ситуацией. Мы привыкнем выделять такие этапы решения: прикидка, обозначения, построение модели, работа с моделью, проверка, ответ. Прикидка и проверка нужны в первую очередь тебе, чтобы быть уверенным в ответе. Эти два этапа не следует переносить из черновика в чистовик. На то есть две причины: в критериях проверки не сказано, что нужны прикидка и проверка; можно ненароком добавить лишних ошибок, если прикидку или проверку выполнишь неверно.

Кроме того, мы познакомимся с некоторыми полезными приемами счета. В задаче с экономическим содержанием иногда попадаются сложные вычисления, и важно не обсчитаться.

Пример 10. Корней сделал вклад 1 536 000 р. под 12,5% годовых 1 июля 2016 года. Это значит, что начиная с 2017 г., каждый год 1 июля банк увеличивает сумму на счете на 12,5%. Сколько денег будет на счете у Корнея 2 июля 2019 года?

Решение.

Прикидка. Если бы 12,5% начислялись на первоначальную сумму вклада, то всего вклад бы увеличился на $12{,}5 \cdot 3 = 37{,}5\%$ — это чуть больше $\frac{1}{3}$. Имеет смысл использовать такое приближение, когда платежных периодов немного, а проценты небольшие. Треть от полутора миллионов — это полмиллиона; значит, вклад увеличится несколько больше, чем на полмиллиона и станет несколько больше двух миллионов.

Обозначать здесь мы ничего не будем; это простая задача, она решается в лоб без уравнений. Мы уже говорили, что увеличить сумму на 12,5% это все равно, что умножить её на 1,125. Достаточно сделать это три раза подряд (попробуй считать без калькулятора):

$1\,536\,000 \cdot 1{,}125 = 1\,728\,000$ — на счете 2 июля 2017 года.

$1\,728\,000 \cdot 1{,}125 = 1\,944\,000$ — на счете 2 июля 2018 года.

$1\,944\,000 \cdot 1{,}125 = 2\,187\,000$ — на счете 2 июля 2019 года.

Проверка. Это значение подтверждается прикидкой — получилось несколько больше двух миллионов.

Ответ. 2 187 000 р.▲

$\boxed{\frac{A}{B}}$ В этом примере главная проблема – вычислить, ведь три раза умножать столбиком четырехзначные числа — ошибкоопасное дело, велик риск обсчитаться; а проверять и искать у себя ошибку очень сложно.

Чтобы оптимизировать вычисления, применяем прием «обыкновенное чудо» — переход от десятичных дробей к обыкновенным. Заметим, что 12,5% от величины — это $\frac{1}{8}$ величины, $0{,}125 = \frac{1}{8}$, а $1{,}125 = \frac{9}{8}$.

$\boxed{1)\ :\ 2)\ \times}$ Применим прием «Разделяй и умножай»: работая с обыкновенными дробями, сначала сокращаем все что можно, — то есть делим и только потом умножаем — это позволит работать с меньшими числами и реже ошибаться в счете:

1) $1\,536\,000 \cdot \frac{9}{8} = \frac{1\,536\,000 \cdot 9}{8} = 192\,000 \cdot 9 = 1\,728\,000.$

2) $1\,728\,000 \cdot \frac{9}{8} = \frac{1\,728\,000 \cdot 9}{8} = 216\,000 \cdot 9 = 1\,944\,000.$

3 $1\,944\,000 \cdot \frac{9}{8} = \frac{1\,944\,000 \cdot 9}{8} = 243\,000 \cdot 9 = 2\,187\,000.$

Вместо того, чтобы умножать четырехзначные числа, здесь умножали трехзначные на однозначные. Кроме того, здесь делили на однозначное число, но в этом действии ошибки бывают реже.

Еще один полезный прием — отложи на завтра то, что необязательно делать сегодня. В практических ситуациях правило «Отложи на потом» плохо работает, а в учебных — очень даже хорошо, там данные подбираются так, чтобы вычисления упрощались, и может случиться так, что счет станет проще. Может и не случиться — но ты ведь и ничего не потеряешь.

Чтобы отложить на потом, не будем решать по действиям, а запишем все нужные действия в одном выражении:

$$1\,536\,000 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^3.$$

Такая запись имеет два преимущества: 1) удобно делать прикидку; 2) удобно планировать вычисления. Еще одна *прикидка* (никогда не жалей времени на прикидку результата в задачах, где сложный счет):

$$1\,536\,000 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^3 \approx 1{,}5 \text{ млн} \cdot \frac{729}{512} \approx 1{,}5 \text{ млн} \cdot \frac{7}{5} = 2{,}1 \text{ млн}.$$

$\boxed{1) : 2) \times}$ План точных вычислений совершенно стандартный: сначала разделить все, что разделится нацело, и только потом умножать. Это позволит работать с числами поменьше:

$$1\,536\,000 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{1\,536\,000 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 8} =$$

$$= \frac{192\,000 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{8 \cdot 8} = \frac{24\,000 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{8} =$$

$$= 3\,000 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 27\,000 \cdot 81 = 2\,187\,000.$$

С таким порядком счета умножение в столбик понадобится только в последнем действии, да и то это будет умножение двузначного числа на двузначное. Писать меньше, считать меньше, ошибок тоже меньше.

Рассмотрим обратную задачу.

Пример 11. Известно, что под 12,5% годовых на счет положили некоторую сумму, в результате за три года накопилось 5 103 000 р. Сколько денег было на счете первоначально?

Начало решения. Представим себе решение по действиям. Чтобы узнать, сколько денег положили на счет, пришлось бы делить столбиком 5 103 000:1,125. И потом повторить дважды. Даже пытаться не будем. Лучше обозначим первоначальный вклад X. Тогда по условию

$$X \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^3 = 5\,103\,000$$

или

$$X = 5103000 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3.$$

Задание. Заверши решение. Какие приемы рационального счета пригодились для построения этого уравнения? Какие еще пригодятся для его решения? Сделай прикидку, сколько примерно получится:

$$X \approx 5\text{ млн} \cdot \frac{512}{729},$$

а потом сосчитай точно.

2.2. Базовая модель начисления процентов

Обобщим предыдущие две задачи и построим для них модель начисления процентов. В других задачах нам пригодятся модификации этой модели. Все мыслимые модификации перечислить невозможно, поэтому ни одну из них не следует учить наизусть. Экзамен проверяет не знание основных моделей, а умение построить свою. Чтобы этому научиться, надо получить опыт построения модели, а не запоминать готовые формулы. Так что каждый раз строй модель задачи заново.

Итак, если сделать вклад размером X д. е. (денежных единиц) под p% годовых, то:

через год на счёте будет $X \cdot (1 + 0{,}01p)$ д. е.;

через два года — $X \cdot (1 + 0{,}01p)^2$ д. е.;

через три — $X \cdot (1 + 0{,}01p)^3$ д. е.;

....

через n лет на счёте будет $S = X \cdot (1+0{,}01p)^n$ д. е.

В простых задачах из четырех величин X, p, n, S даны три, а нужно найти четвертую. В этой схеме часто удобно иметь дело не с переменной p, а с переменной q, которую будем называть *процентным коэффициентом*: $q = 1 + 0{,}01p$. Увеличить величину на p% — значит, увеличить ее в q раз. Модель с этой переменной будет выглядеть еще проще:

$$S = X \cdot q^n.$$

Задание. Примени эту модель к примерам 10 и 11. Определи, какие значения принимают переменные X, p, n, S, q в этих примерах; что дано, что требуется найти в задаче.

Это задание очень простое, но очень важное, не пропускай его — будет проще разбираться дальше. Кроме того, ты приучишься в таких задачах работать не с цифрами, а с буквами. Это гораздо полезнее вот по каким причинам.

Меньше вероятность сделать описку.

В буквенных записях проще замечать закономерности, а закономерности (если вдруг нарушатся) помогут заметить ошибки, позволят аккуратнее сделать прикидку. В некоторых задачах заметить закономерности особенно важно — от этого зависит решение.

Эксперту, который будет проверять твою работу, будет гораздо проще. Он сможет разделить этапы построения модели и вычислений.

Однако пользоваться готовыми формулами с буквами вредно. Не забывай: важнее научиться строить алгебраическую модель задачи, а не пользоваться готовой. Тот, кто научится строить свою модель, станет умнее и в будущем сможет применить творческие навыки. Тот, кто научится пользоваться готовой формулой, станет послушнее и в будущем сможет выполнять инструкции, составленные другими людьми.

А теперь применим модель в более сложной ситуации.

Пример 12. 25 декабря 2014 г. Пантелей сделал вклад в сумме 3 850 000 д. е. под некоторый постоянный процент годовых на два года. Через год прошла капитализация — сумма на счёте увеличилась на положенное число процентов; еще через год капитализация прошла еще раз, и Пантелей тотчас же снял со счёта все деньги — 5 270 265 д. е. Какой процент банк начислял по вкладу?

Решение.

Прикидка. За два года сумма на вкладе увеличилась примерно на 1 400 000 д. е., — это чуть больше, чем треть от первоначальной суммы (39 : 3 = 13). Значит, за год сумма увеличивается примерно на шестую часть.

Обозначения. Пусть первоначальная сумма $X = 3\,850\,000$ в первый год увеличилась в q раз и стала равна Xq; еще через год она опять увеличилась в q раз и стала равна Xq^2. Число p процентов, на которые увеличивается каждый год сумма, выражается через q так: $p = 100(q - 1)$. В задаче требуется найти p.

Построение модели. Занесём эти данные в таблицу:

	Сумма на счёте 27 декабря
2014-й год	$X = 3\,850\,000$
2015-й год	Xq
2016-й год	$Xq^2 = 5\,270\,265$

Мы получаем простейшее квадратное уравнение:

$$3\,850\,000\, q^2 = 5\,270\,265.$$

Работа с моделью. Нас интересует только положительный корень:

$$q = \sqrt{\frac{5\,270\,265}{3\,850\,000}}.$$

$\boxed{A \cdot B}$ На экзамене нельзя пользоваться калькулятором, а мы и не будем. Будем раскладывать на множители всё подряд — это позволит вынести из-под знака корня как можно больше множителей и сократить дробь.

Выносить и сокращать можно в любом порядке; необязательно искать оптимальный способ. Разумно хвататься за первое, что придет в голову: когда после сокращений числа станут меньше, что-то еще заметить будет проще. В данном случае, например, легко заметить, что в знаменателе есть множитель в виде полного квадрата — 10 000, его сразу вынесем из-под корня. Оставшаяся дробь сокращается на 5:

$\boxed{1):2)\times}$

$$q=\sqrt{\frac{5\,270\,265}{3\,850\,000}}=\frac{1}{100}\cdot\sqrt{\frac{5\,270\,265}{385}}=\frac{1}{100}\cdot\sqrt{\frac{1\,054\,053}{77}}.$$

Видно, что знаменатель делится на 7 и 11, так что разумно проверить — не сократится ли дробь на эти числа. Видно еще, что числитель делится на 9 (сумма цифр делится на 9). Начать лучше с девятки, чтобы действовать наверняка, а делимость на 7 и 11 никуда не денется. Нам повезло, и 9 удалось вытащить из-под корня дважды:

$$q=\frac{1}{100}\cdot\sqrt{\frac{1\,054\,053}{77}}=\frac{3}{100}\cdot\sqrt{\frac{117117}{77}}=\frac{3\cdot 3}{100}\cdot\sqrt{\frac{13013}{77}}=$$

$$=\frac{9}{100}\cdot\sqrt{\frac{1183}{7}}=\frac{9}{100}\cdot\sqrt{169}=\frac{9\cdot 13}{100}=1{,}17.$$

Теперь найдем p: $p=100(q-1)=100(1{,}17-1)=17$.

Проверка. Это значение соответствует прикидке, ведь $\frac{17}{100}\approx\frac{1}{6}$.

Ответ. 17.▲

Слабая стратегия — мучительно делить в столбик 5 270 265 на 3 850 000, получить 1,3689, а потом выковыривать корень из десятичной дроби. Это дольше и чаще приводит к вычислительным ошибкам. Совсем плохая стратегия — вычислять на калькуляторе: так не подготовишься к экзамену. Не только в этой ситуации, но и во многих других работает эмпирическое правило: если тебе на ум пришло считать на калькуляторе или в столбик — найди множители.

В предыдущих примерах мы познакомились с простейшей моделью для вкладов и некоторыми приемами вычислений. Следующий пример лишь чуть-чуть сложнее, но в нем в полную силу сыграет основной инструмент — таблица. В предыдущем примере можно было не запутаться и без него.

Пример 13. 25 ноября 2000 г. Пантелей сделал вклад в сумме 512 000 д. е. под некоторый постоянный процент годовых. Через год на вклад были начислены проценты, и Пантелей тотчас же снял со счета 304 000 д. е. Через год на оставшуюся сумму были начислены проценты, после чего Пантелей снял со счета все деньги — 361 000 д. е.

Какой процент банк начислял по вкладу?

Решение.

Прикидка. За два года доход составил примерно 3,6+3–5,1=1,5 сотен тысяч — это примерно 30% от начальной суммы; можно предположить, что годовой процент примерно равен 15.

Обозначения. После начисления p процентов вклад увеличивается в $q = 1 + 0{,}01p$ раз. В задаче требуется найти p.

Построение модели. Представим движение денег на счете в таблице:

Год	После начисления процентов	После того, как сняли деньги
2001	$512\,000q$	$512\,000q-304\,000$
2002	$(512\,000q-304\,000)q$	$(512\,000q-304\,000)q-361\,000$

Получили стандартное квадратное уравнение:

$$(512\,000q-304\,000)q-361\,000 = 0.$$

Работа с моделью. Вообще-то квадратные уравнения решать легко и приятно, но здесь сложный счет. Поэтому мы не будем вычислять дискриминант — это сложно и бессмысленно, а только добудем множители, на которые он раскладывается. Все остальные действия отложим на потом (мощный прием, мы им уже пользовались). Добывать множители будем мало-помалу: заметили общий множитель, вынесли за скобки, числа стали поменьше, — заметили новый общий множитель, вынесли и его, и так далее. Для начала все слагаемые разделим на 1000:

$$512q^2-304q-361=0.$$

A·B

$$D = 304^2 + 4 \cdot 512 \cdot 361 = (8 \cdot 38)^2 + 4 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 361 = 8^2(38^2 + 32 \cdot 361) = 8^2 \cdot 2^2(19^2 + 8 \cdot 361) = 8^2 \cdot 2^2 \cdot 19^2(1 + 8);$$

$$\sqrt{D} = 8 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 3.$$

Необязательно добывать все простые множители. Мы сразу не заметили, что 304 делится на $2^4 = 16$, на это потребовалось два этапа, — ну и ладно, лишь бы считать было комфортно. Из двух корней выберем положительный:

$$q = \frac{304 + 8 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 3}{2 \cdot 512} = \frac{16 \cdot 19 + 8 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 3}{2 \cdot 16 \cdot 32} = \frac{19 + 19 \cdot 3}{2 \cdot 32} = \frac{19 \cdot 4}{2 \cdot 32} = \frac{19}{16} = 1{,}1875.$$

Тогда $p = 18{,}75$. Пришлось делить 19 на 16 столбиком, но все остальное можно было сосчитать устно.

Проверка. Значение по порядку похоже на то, что получено прикидкой. К тому же по дороге все хорошо извлекалось и сокращалось. Можно надеяться, что ошибок нет.

Ответ. 18,75.▲

Прежде чем разбирать различные схемы выплаты кредитов, рассмотрим пример, иллюстрирующий разницу между задачами о вкладах и задачами о кредитах.

Пример 14. 31 декабря 2004 года Еремей взял в банке 512 000 р. в кредит на 2 года. Схема выплаты кредита была следующей: до 31 ноября каждого следующего года банк начислял проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивал долг на $p\%$), затем до истечения этого же платёжного периода (т. е. до 31 декабря того же года) Еремей выплачивал долг двумя траншами: 304 000 р. в 2005 году и 361 000 р. в 2006 г. Под какой процент банк выдал Еремею кредит?

Решение. Обозначим сумму кредита $X = 512\,000$; после начисления p процентов долг Еремея увеличивался в $q = 1 + 0{,}01p$ раз. Занесем в таблицу информацию о том, как менялась величина долга.

Год	Ноябрь	Декабрь
2004		X
2005	Xq	$Xq - 304\,000$
2006	$(Xq - 304\,000)q$	$(Xq - 304\,000)q - 361\,000$

Задание. Видно, что эта задача очень похожа на предыдущую. Реши ее самостоятельно.

Как показал пример, задачи о кредитах принципиально не отличаются от задач о вкладах (депозитах). В целом задачи о кредитах кажутся сложнее задач о вкладах, потому что схемы выплат кредитов разнообразнее.

2.3. Различные схемы выплаты кредитов

Разберем и сравним две важные схемы выплаты кредитов: с дифференцированными и аннуитетными платежами. При дифференцированной схеме каждый платеж состоит из двух частей. Первая часть — основной платеж, его размер не изменяется на всем сроке кредитования. Скажем, если в кредит взяли 1 000 000 р. на 5 месяцев, а платежи ежемесячные, то тело кредита делится на 5 равных частей по 200 000 р. — это и будет ежемесячный основной платеж. Вторую часть платежа составляют проценты на текущую часть долга. Долг постепенно уменьшается, потому и платежи в счет процентов тоже уменьшаются. Первый платеж самый большой, последний — самый маленький.

На практике платежи обычно ежемесячные, а банки учитывают каждый день кредитования: важно, сколько дней в месяце, високосный год или нет. А в экзаменационных задачах обычно упрощенная схема: за каждый платежный период проценты начисляются один раз. Иначе говоря, если проценты начисляются ежегодно, то и выплаты по кредиту раз в год. Если проценты начисляются ежемесячно, то и выплаты ежемесячные.

При аннуитетных платежах сумма кредита и сумма процентов за всё время пользования кредитом суммируются и делятся на число платежей, все платежи получаются равными.

Пример 15. Корней планирует в июле взять кредит на срок 4 года под 20% годовых. Платежи могут быть дифференцируемыми или аннуитетными. В каком случае Корней выплатит больше денег?

Аннуитетные платежи проходят так: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; в июне необходимо выплатить некоторую фиксированную сумму, каждый год одну и ту же.

Дифференцированные платежи проходят так: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; в июне нужно произвести выплаты; размер долга на конец года уменьшается каждый год на одну и ту же величину.

Решение.

Обозначим X тело кредита — столько Корней взял в долг — и вычислим, во сколько раз увеличивается долг после начисления $p = 20$ процентов:

$$q = 1+0{,}01p = 1{,}2 = \frac{6}{5}.$$

1. Сначала разберемся с аннуитетными платежами.

Построение модели. При аннуитетных платежах в июне необходимо выплатить некоторую сумму, каждый год одну и ту же. Обозначим ее x.

В задачах о вкладах мы следили за суммой денег на счете. А сейчас будем следить за величиной долга.

В конце нулевого года долг был равен X.

В первый год на него начислили проценты — увеличили в q раз, — а потом Корней сделал первый платеж x, долг стал равен $Xq - x$.

Во второй год на этот остаток начислили проценты, — стало $(Xq - x)q$, — а Корней сделал еще один платеж, и в конце года долг стал равен $(Xq - x)q - x$.

Запишем в таблицу, что происходило в течение четырех лет. Записывая данные, постарайся выявить для себя связи между элементами в разных ячейках, и следить за тем, чтобы эти связи выполнялись. Проще всего заполнить столбец выплат: там везде одна величина x. Долг в январе каждый раз в q раз больше долга в предыдущий декабрь. А долг в декабре получается вычитанием июньских выплат из январского долга.

Год	Долг в январе	Выплаты	Долг в декабре
0-й			X
1-й	Xq	x	$Xq - x$
2-й	$(Xq-x)q$	x	$(Xq - x)q - x$
3-й	$((Xq-x)q-x)q$	x	$((Xq-x)q-x)q - x$
4-й	$(((Xq-x)q-x)q-x)q$	x	0

В конце четвертого года кредит был погашен, откуда мы получаем уравнение

$$(((Xq - x)q - x)q - x)q - x = 0.$$

Сейчас мы решим его, выведя по ходу несколько полезных формул. Не стоит их запоминать наизусть. Важнее научиться выводить уравнение по таблице, потому что это не единственная возможная схема, в других задачах она может немного отличаться. Твоя цель — не бездумно применить вызубренную формулу, но научиться творчески вывести уравнение.

Работа с моделью. Решим полученное уравнение относительно x:

$$Xq^4 = x(1 + q + q^2 + q^3),$$

$$x = X \cdot \frac{q^4}{1+q+q^2+q^3}.$$

Сумма всех выплат за четыре года составляет $4x = 4X \cdot \frac{q^4}{1+q+q^2+q^3}$. Подставим значение $q = \frac{6}{5}$:

$$4X \cdot \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^4}{1+\frac{6}{5}+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^3} = X \cdot \frac{4 \cdot 6^4}{5\left(5^3+6 \cdot 5^2+6^2 \cdot 5+6^3\right)} =$$

$$= X \cdot \frac{5184}{3355} \approx 1{,}545X.$$

2. Теперь разберемся с дифференцированными платежами.

Построение модели. При дифференцированной схеме проще всего заполнить столбец с долгом на конец года. Он уменьшается равномерно, это значения X, $\frac{3X}{4}$, $\frac{2X}{4}$, $\frac{X}{4}$.

Долг в январе каждый раз в q раз больше долга в предыдущий декабрь. А ежегодные выплаты получаются вычитанием декабрьского значения из январского.

Год	Долг в январе	Выплаты в июне	Долг в декабре
0-й			X
1-й	Xq	$Xq - \frac{3X}{4}$	$\frac{3X}{4}$

2-й	$\frac{3X}{4}q$	$\frac{3X}{4}q-\frac{2X}{4}$	$\frac{2X}{4}$
3-й	$\frac{2X}{4}q$	$\frac{2X}{4}q-\frac{X}{4}$	$\frac{X}{4}$
4-й	$\frac{X}{4}q$	$\frac{X}{4}q$	0

Сумма всех выплат — сумма величин в соответствующем столбце — составляет

$$Xq-\frac{3X}{4}+\frac{3X}{4}q-\frac{2X}{4}+\frac{2X}{4}q-\frac{X}{4}+\frac{X}{4}q=$$

$$=X\left(q-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}q-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}q-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}q\right)=X\left(q\cdot\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right).$$

При $q=1{,}2$ получаем сумму $1{,}5X$. Это несколько меньше, чем при аннуитетных платежах.▲

Кроме базовых переменных — первоначальная сумма, процентная ставка, число расчетных периодов, размер равных платежей, — в модели могут потребоваться другие. Схемы движения денежных средств могут быть еще более запутанными, поэтому надо научиться ясно представлять данные задачи. Для этого удобно пользоваться таблицей.

Пример 16. По бизнес-плану предполагается вложить в проект 10 млн р. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме того, сразу после начисления процентов нужны дополнительные вложения: целое число N млн р. в первый и второй годы, а также целое число M млн р. в третий и четвертый годы. Ожидается, что первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года — как минимум утроятся. Каковы наименьшие возможные значения N и M?

Решение.

Обозначения. Сразу вычислим процентный коэффициент в этой схеме: $q = 1{,}1$, первоначальный вклад обозначим X. Переменные M и N введены в условии задачи.

Построение модели. Построим таблицу; в ней должно быть четыре строки с данными и одна строка заголовков.

Год	Вложения в начале года, млн р.	После начисления процентов	После дополнительных вложений
1	X	Xq	$Xq+N$
2	$Xq+N$	$(Xq+N)q$	$(Xq+N)q+N$ (*)
3	$(Xq+N)q+N$	$((Xq+N)q+N)q$	$((Xq+N)q+N)q+M$
4	$((Xq+N)q+N)q+M$	$(((Xq+N)q+N)q+M)q$	$(((Xq+N)q+N)q+M)q+M)$ (**)

Сумма вложений в конце года каждый раз превращается в сумму вложений в начале следующего года. При начислении процентов ее умножают на q и записывают в клетку правее. Потом добавляют дополнительные вложения N или M и записывают в клетку еще правее.

Работа с моделью. По условию величина в клетке (*) как минимум вдвое больше первоначальной суммы X, поэтому получаем неравенство

$$(Xq+N)q+N \geq 2X.$$

Нас интересует наименьшее целое решение этого неравенства относительно N при известных $X = 10$ и $q = 1{,}1$:

$$(q+1)N \geq 2X-Xq^2;$$

$$N \geq X \cdot \frac{2-q^2}{q+1}.$$

Подставим конкретные значения:

$$X \cdot \frac{2-q^2}{q+1} = 10 \cdot \frac{2-1{,}1^2}{1{,}1+1} = 10 \cdot \frac{0{,}79}{2{,}1} = \frac{79}{21} < 4.$$

Наименьшее целое решение — $N=4$.

Зная это, можно упростить таблицу, и только потом искать M. Вычислим значение в клетке (*): $(Xq+N)q+N=(10\cdot1{,}1+4)\cdot1{,}1+4=20{,}5$. Чтобы упростить записи, введем обозначение $Y=20{,}5$ — столько составляют вложения в проект к началу третьего года. Теперь нижние две строки в таблице будут выглядеть так:

Год	Вложения в начале года, млн р.	После начисления процентов	После дополнительных вложений
3	Y	Yq	$Yq+M$
4	$Yq+M$	$(Yq+M)q$	$(Yq+M)q+M$ (**)

По условию значение в клетке (**) как минимум втрое больше первоначального вложения:

$$(Yq + M)q+M \geq 3X;$$
$$(q + 1)M \geq 3X-Yq^2;$$
$$M \geq \frac{3X-Yq^2}{q+1}.$$

Вычислим правую часть:

$$\frac{3X-Yq^2}{q+1}=\frac{3\cdot 10-20{,}5\cdot 1{,}1^2}{1{,}1+1}=\frac{5{,}195}{2{,}1}.$$

Наименьшее целое решение неравенства — $M = 3$.

Проверка. В этой задаче сложно было сделать прикидку, поэтому просто пересчитаем движение вложенных средств (в млн р.).

1. В конце первого года — $10 \cdot 1{,}1 + 4 = 11 + 4 = 15$.

2. В конце второго года — $15 \cdot 1{,}1 + 4 = 16{,}5 + 4 = 20{,}5$. Вложения удвоились.

3. В конце третьего года —

$20{,}5 \cdot 1{,}1 + 3 = 22{,}55 + 3 = 25{,}55$.

4. В конце четвертого года —

$25{,}55 \cdot 1{,}1 + 3 = 28{,}105 + 3 = 31{,}105$. Вложения утроились.

Похоже, что меньшие значения для N и M не подходят.

Ответ. $N=4$ и $M=3$.▲

Таблица погашения долга может быть дана по условию задачи. С одной стороны, это упрощает построение модели. С другой стороны, схема погашения кредита получается нестандартной.

Пример 17. В июле 2018 года Пантелей планирует взять кредит в банке в размере X тыс. рублей (X — натуральное число) сроком на 3 года.

Условия возврата кредита:

- каждый январь долг увеличивается на 22,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июне каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года величина долга задается в следующей таблице.

Год	2018	2019	2020	2021
Долг в тыс. р.	X	$0{,}7X$	$0{,}4X$	0

Найдите наименьшее значение X, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение.

Обозначения. Размер кредита по условию обозначается X. Как всегда, введем процентный коэффициент q и сразу же выразим его обыкновенной дробью:

$$q = 1 + \frac{22,5}{100} = \frac{122,5}{100} = \frac{245}{200} = \frac{49}{40}.$$

Построение модели. Заполним более подробную таблицу, в которой удобнее следить за величиной долга.

Год	Долг в январе	Выплата в июне	Долг в июле
2018			X
2019	$\frac{49}{40}X$	$\frac{49}{40}X - 0,7X$	$0,7X$
2020	$\frac{49}{40} \cdot 0,7X$	$\frac{49}{40} \cdot 0,7X - 0,4X$	$0,4X$
2021	$\frac{49}{40} \cdot 0,4X$	$\frac{49}{40} \cdot 0,4X$	0

Проще всего заполнить столбец «Долг в июле» — эти значения даны по условию задачи. Долг в январе (кроме 2018 года) получается увеличением долга в предыдущем июле в $q = \frac{49}{40}$ раз; на этом основании заполняется столбец «Долг в январе». Выплаты в июне получаются как разность между долгом в январе и долгом в июне.

В задаче требуется найти наименьшее значение X такое, что числа

$$\frac{49}{40}X - 0,7X, \quad \frac{49}{40} \cdot 0,7X - 0,4X, \quad \frac{49}{40} \cdot 0,4X$$

все целые.

Работа с моделью. Упростим полученные выражения:

$$\frac{49}{40}X - 0,7X = \left(\frac{49}{40} - \frac{7}{10}\right)X = \frac{21}{40}X;$$

$$\frac{49}{40}\cdot 0{,}7X-0{,}4X=\left(\frac{49\cdot 7}{40\cdot 10}-\frac{4}{10}\right)X=\frac{183}{400}X;$$

$$\frac{49}{40}\cdot 0{,}4X=\frac{49\cdot 4}{40\cdot 10}X=\frac{49}{100}X.$$

Чтобы числа $\frac{21X}{40}$, $\frac{183X}{400}$, $\frac{49X}{100}$ были целыми, все дроби должны быть сократимы. Это значит, что X делится на 400. Наименьшее такое значение — $X=400$.

Проверка. Посчитаем, что произойдёт за три года (в тыс. р.).

1. В кредит Пантелей возьмет 400 тыс. р. в 2018 г., в 2019 г. на эту сумму начислят проценты: $400\cdot\frac{49}{40}=490$; после чего Пантелей выплатит $\frac{49}{40}X-0{,}7X=490-280=210$ (тыс. р.), это целое число. Сумма долга составит 280 тыс. р.

2. В 2020 г. опять начислят проценты: $280\cdot\frac{49}{40}=343$, Пантелей выплатит $343-0{,}4\cdot 400=183$ (тыс. р.), это целое число. Сумма долга составит 160 тыс. р.

3. В 2021 г. проценты начислят последний раз: $160\cdot\frac{49}{40}=196$. Это целое число, столько тысяч рублей составит последний платеж Пантелея.

Ответ. 400.

Один из самых сложных видов задач — когда требуется определить число платежных периодов. Непонятно даже, сколько строк должно быть в таблице, поэтому сложнее ее построить и установить взаимосвязи между величинами.

Здесь два основных подхода. Можно сделать *прикидку*, *угадать* число платежных периодов и *доказать*, что догадка верна. А можно установить *закономерности* в связях между величинами, на основании закономерностей составить *уравнение* и решить его.

Пример 18. 3 февраля 2017 года Пантелей взял в банке 500 000 р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая:

1 числа каждого месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг в $q = 1{,}02$ раз), 2 числа Пантелей делает платёж. Для него важно, чтобы ежемесячные платежи были не более 140 000 р. На какое минимальное количество месяцев Пантелей мог взять кредит?

Решение.

Прикидка. Чтобы число месяцев было минимальным, выплаты должны быть как можно больше. Так что можно считать, что каждый месяц, кроме, возможно, самого последнего, Пантелей выплачивает по 140 000 р. Тогда за 3 месяца он выплатит $140\,000 \cdot 3 = 420\,000$ р. — это явно мало. За 4 месяца он может выплатить $140\,000 \cdot 4 = 560\,000$ р. Хватит ли этих денег, чтобы выплатить долг с процентами? Это на 60 000 р. больше, чем Пантелей занимал.

Предположим, что ответ равен 4 и проверим это предположение. Если проверка покажет, что за 4 месяца Пантелей расплатится, то в чистовике проверку запишем как доказательство. Если 4 месяцев окажется мало, то продолжим угадывать дальше.

Способ 1. При начислении процентов долг увеличивается в одно и то же число раз, но с каждым месяцем он уменьшается. Потому самую большую сумму банк начислит в первый раз, и каждый месяц долг увеличивается не более чем на $500\,000 \cdot (q - 1) = 500\,000 \cdot \frac{1}{50} = 10\,000$ р. За четыре месяца он увеличится не больше чем на 40 000 р., а это меньше 60 000 р. Значит, Пантелей сможет выплатить кредит за 4 месяца.

Способ 2. Можно бесхитростно вычислить, сколько Пантелею придется выплачивать в каждом месяце.

Месяц	Долг на 1 число	Выплата 2 числа	Долг на 3 число
Февраль			500 000
Март	510 000	140 000	370000
Апрель	377400	140 000	237400
Май	242148	140 000	102148
Июнь	104190,96	104190,96	0

Ответ. 4. ▲

Достоинство второго способа: это решение очень убедительно и его легко оформить. Логика рассуждений проста и в ней почти невозможно ошибиться. Есть и недостаток: чтобы построить такую таблицу, надо 4 раза умножить и 4 раза вычесть, а счет в столбик хоть и бесхитростный, но очень уж ошибкоопасный.

Во-первых, можно ошибиться в порядке величины (промахнуться в количестве нулей или знаков после запятой). От таких ошибок спасает проверка *прикидкой*. Если ты умножал число на 1,125, а оно увеличилось почти в 10 раз, значит, надо искать ошибку.

Во-вторых, можно промахнуться в цифре. Такие ошибки выявляют *вычеркиванием девяток*.

В следующей задаче тоже нужно найти число платежных периодов, однако потребуется более точный анализ.

Пример 19. В июле планируется взять кредит в банке на несколько (целое число) лет. Схема выплат следующая:

каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

в июне необходимо выплатить часть долга;

в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Общая сумма выплат оказалась вдвое больше суммы, взятой в кредит. На сколько лет был взят кредит?

Решение.

Обозначения. Обозначим сумму кредита X, число лет n, процентный коэффициент $q=1{,}25$.

Построение модели. Схема выплат похожа на схему аннуитетных платежей из примера 15. Долг каждый год уменьшается на одну и ту же величину — $\frac{X}{n}$, ряд июльских значений получается таким: $X,\ \frac{n-1}{n}X, \frac{n-2}{n}X, \ldots, \frac{1}{n}X$.

Их получить проще всего, поэтому удобно заполнять таблицу, начиная с последнего столбца. Потом переходить к столбцу с январскими долгами, там значение в каждой ячейке получается умножением предыдущего июльского значения на q. А выплаты в июне получаются вычитанием июльского значения из январского. Мы не знаем, сколько строк в таблице (это, собственно, спрашивается в задаче), поэтому вместо средних строк напишем точки.

Год	Долг в январе	Выплаты в июне	Долг в июле
0-й			X
1-й	Xq	$Xq-\frac{(n-1)}{n}X$	$\frac{(n-1)X}{n}$
2-й	$\frac{(n-1)X}{n}q$	$\frac{(n-1)X}{n}q-\frac{(n-2)}{n}X$	$\frac{(n-2)X}{n}$
...	...	...	...
k-й	$\frac{(n-k+1)X}{n}q$	$\frac{(n-k+1)X}{n}q-\frac{(n-k)}{n}X$	$\frac{(n-k)}{n}X$
...	...	...	...
(n–1)-й	$\frac{2X}{n}q$	$\frac{2X}{n}q-\frac{1}{n}X$	$\frac{1}{n}X$
n-й	$\frac{X}{n}q$	$\frac{X}{n}q$	0

Даже ясно понимая логику заполнения, в таблицах с неопределенным числом строк часто ошибаются. Одни считают нулевой год первым. Другие думают, что в k-ый год долг равен $\frac{kX}{n}q$ или $\frac{(n-k)X}{n}q$, а ведь и то и другое неверно. Чтобы исключить такие ошибки, заполнив первые 2-3 строки, постарайся установить закономерность и заполнить на ее основании строку с номером k. Потом подставь вместо k первые числа ($k = 1, 2$) и последние ($k = n-1, n$), — результаты должны совпадать с соответствующими строчками. Если не совпадают, доработай модель.

Чтобы найти сумму всех выплат, складывают значения в июньском столбце. Можно еще из значений в январском столбце вычесть значения в июльском (кроме июля 0-го года), — будет проще приводить подобные. Так и сделаем:

$$Xq+\frac{(n-1)X}{n}q+\ldots+\frac{2X}{n}q+\frac{X}{n}q-$$

$$-\frac{(n-1)X}{n}-\frac{(n-2)X}{n}-\ldots-\frac{X}{n}=$$

$$=\frac{Xq}{n}(n+(n-1)+\ldots+2+1)-\frac{X}{n}((n-1)+(n-2)+\ldots+1)=$$

$$=\frac{Xq}{n}\cdot\frac{(n+1)n}{2}-\frac{X}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{Xq(n+1)}{2}-\frac{X(n-1)}{2}.$$

Здесь пригодилась формула суммы арифметической прогрессии. По условию этот результат вдвое больше X, так что с учетом $q=1,25$ получаем уравнение относительно n:

$$\frac{1,25X(n+1)}{2}-\frac{X(n-1)}{2}=2X. \qquad (1)$$

Работа с моделью. Осталось его решить:

$$1,25(n+1)-(n-1)=4; \qquad (2)$$

$$5(n+1)-4(n-1)=16; \qquad (3)$$

$$n=7.$$

При переходе от (1) к (2) обе части уравнения разделили на ненулевую неизвестную величину X, она так и останется неизвестной. Кроме того, умножили обе части на 2, чтобы *избавиться от дробей*. Без дробей считать проще, а потому и ошибок меньше. После этого в уравнении обыкновенных дробей не осталось, зато остались десятичные, поэтому пришлось избавляться от дробей во второй раз — при переходе от (2) к (3) уравнение умножили на 4. Это лучше делать до раскрытия скобок и приведения подобных.

Ответ. Кредит был взят на 7 лет.▲

2.4. Задачи на различные банковские операции

Задача 16.

а) Пантелей хочет купить в интернет-магазине книги на сумму 1650 р. В магазине ему предлагают увеличить заказ до 2000 р, за что обещают скидку в 15%. Что выгоднее Пантелею: купить нужные книги без скидки или увеличить стоимость заказа и получить скидку в 15%, купив какую-нибудь ненужную книгу?

б) Корней хочет купить в интернет-магазине книги на сумму 1280 р. В магазине ему предлагают увеличить заказ до 1500 р, за что обещают скидку в 15%. Что выгоднее Корнею: купить нужные книги без скидки или увеличить стоимость заказа и получить скидку в 15%, купив какую-нибудь ненужную книгу?

Задача 17.

а) Пантелей положил на депозит в банк некоторую сумму под 10% годовых. Через сколько лет сумма на его счете удвоится?

б) Корней положил на депозит в банк некоторую сумму под 12,5% годовых. Через сколько лет сумма на его счете удвоится?

Задача 18.

а) Пантелей взял в банке кредит 50 000 р. под p% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно 4750 р. так, чтобы за 12 месяцев выплатить всю сумму, взятую в кредит, с процентами. Под какой процент был взят кредит?

б) Корней взял в банке кредит 60 000 р. под p% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно 5650 р. так, чтобы за 12 месяцев выплатить всю сумму, взятую в кредит, с процентами. Под какой процент был взят кредит?

Задача 19.

а) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на три года в размере X млн р., где X — натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2018	2019	2020	2021
Долг, млн. р.	X	$0{,}7X$	$0{,}4X$	0

Найдите наименьшее значение X, при котором каждая из выплат будет больше 800 000 р.

б) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на три года в размере X млн р., где X — натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 12% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2018	2019	2020	2021
Долг, млн. р.	X	$0{,}75X$	$0{,}4X$	0

Найдите наибольшее значение X, при котором каждая из выплат не превысит 1 млн р.

Задача 20.

а) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере X млн р., где X — натуральное число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Долг, млн. р.	X	$0{,}8X$	$0{,}5X$	$0{,}3X$	0

Найдите наибольшее значение X, при котором сумма всех выплат будет меньше 4 млн р.

б) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере X млн р., где X — натуральное число. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг увеличивается на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Долг, млн. р.	X	$0{,}8X$	$0{,}55X$	$0{,}3X$	0

Найдите наибольшее значение X, при котором сумма всех выплат будет меньше 5 млн р.

Задача 21.

а) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 1 млн р. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года остаток долга должен быть равен сумме, указанной в следующей таблице.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Долг, р.	1 000 000	700 000	400 000	200 000	0

На сколько рублей сумма всех выплат превысит 1 млн р.?

б) В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 2 млн р. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года остаток долга должен быть равен сумме, указанной в следующей таблице.

Год	2018	2019	2020	2021	2022
Долг, р.	2 000 000	1 600 000	1 100 000	600 000	0

На сколько рублей сумма всех выплат превысит 2 млн р.?

Задача 22.

а) Пантелей взял в банке кредит на срок 16 месяцев на следующих условиях. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $p\%$ этой суммы, а затем Пантелей делает выплату, которая погашает эти проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Общая сумма, выплаченная Пантелеем, оказалась на 17% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p.

б) Корней взял в банке кредит на срок 12 месяцев на следующих условиях. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $p\%$ этой суммы, а затем Корней делает выплату, которая погашает эти проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Общая сумма, выплаченная Корнеем, оказалась на 9,75% больше суммы, взятой в кредит. Найдите p.

Задача 23.

а) Пантелей положил в банк 1 000 000 р. на вклад «Мне повезет!». По этому вкладу первые два года банк начислял 15% годовых, но потом снизил ставку до p% годовых. В результате за 4 года доход Пантелея по вкладу составил 684 804 р. Найдите p.

б) Корней положил в банк 1 000 000 р. на вклад «Поймай удачу!». По этому вкладу первые два года банк начислял 18% годовых, но потом снизил ставку до p% годовых. В результате за 4 года доход Корнея по вкладу составил 542 564 р. Найдите p.

Задача 24.

а) Матвей и Пантелей планируют взять в кредит одинаковые суммы, но в разных банках и на разных условиях — Матвей под 25% годовых, а Пантелей — под 12,5%. Схемы выплат похожи: в конце каждого года банк начисляет проценты, а потом заемщик переводит платеж. Матвей собирается вернуть кредит двумя равными платежами, а Пантелей — четырьмя. У кого общие выплаты окажутся больше?

б) Корней и Еремей планируют взять в кредит одинаковые суммы, но в разных банках и на разных условиях — Корней под 25% годовых, а Еремей — под 12,5%. Схемы выплат похожи: в конце каждого года банк начисляет проценты, а потом заемщик переводит платеж. Корней собирается вернуть кредит двумя равными платежами, а Еремей — тремя. У кого общие выплаты окажутся больше?

Задача 25.

а) В декабре 2016 года Пантелей положил в банк на депозит 200 000 р. под 13% годовых. Через два года, в декабре 2018 г., он решил снять со счета после начисления процентов целое число тысяч рублей. Пантелей хочет, чтобы еще через два года, в декабре 2020 г., на его счете было не менее 250 000 р. Какую наибольшую сумму он может снять со счета в декабре 2018 г.?

б) В декабре 2016 года Корней положил в банк на депозит 300 000 р. под 12% годовых. Через два года, в декабре

2018 г., он решил снять со счета после начисления процентов целое число тысяч рублей. Корней хочет, чтобы еще через два года, в декабре 2020 г., на его счете было не менее 350 000 р. Какую наибольшую сумму он может снять со счета в декабре 2018 г.?

Задача 26.

а) 1 февраля 2017 года Пантелей взял в банке 300 тыс. р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Пантелей переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Пантелей может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 80 тыс. рублей?

б) 1 февраля 2017 года Корней взял в банке 500 тыс. р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Корней переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Корней может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 тыс. рублей?

Задача 27.

а) Пантелей положил в банк 300 000 р. под 8% годовых. Два года подряд после начисления процентов он снимал одну и ту же сумму. К концу третьего года после начисления процентов у него на счете оказалось 346 464 р. Какую сумму снимал Пантелей первые два года?

б) Корней положил в банк 350 000 р. под 10% годовых. Два года подряд после начисления процентов он снимал одну и ту же сумму. К концу третьего года после начисления процентов у него на счете оказалось 410 410 р. Какую сумму снимал Пантелей первые два года?

Задача 28.

а) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 15 млн рублей в первый и второй годы, а также по 13 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 130 млн, а за четыре года станут больше 200 млн рублей.

б) По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 7 млн рублей в первый и второй годы, а также по 7,5 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 70 млн, а за четыре года станут больше 100 млн рублей.

Задача 29.

а) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3000 тыс. р. на целое число лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в тыс. р.) после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 1100 тыс. р.?

б) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 2000 тыс. р. на целое число лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат (в тыс. р.) после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 650 тыс. р.?

Задача 30.

а) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 300 000 рублей.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при таких условиях?

б) В июле планируется взять кредит на сумму 1 000 000 рублей. Условия его возврата таковы:

• каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

• с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга;

• ежегодные выплаты не превышают 350 000 рублей.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при таких условиях?

Задача 31.

а) Пантелей хочет взять кредит на сумму 3 019 500 р. на 4 года под 20% годовых. Банк предложил ему два варианта погашения кредита ежегодными платежами:

Вариант 1. Каждый год выплачивается одна и та же сумма (аннуитетные платежи).

Вариант 2. После каждого платежа долг уменьшается на одну и ту же сумму (дифференцированные платежи).

На сколько рублей меньше Пантелей отдаст банку, если выберет второй вариант?

б) Корней хочет взять кредит на сумму 394 400 р. на 4 года под 12,5% годовых. Банк предложил ему два варианта погашения кредита ежегодными платежами:

Вариант 1. Каждый год выплачивается одна и та же сумма (аннуитетные платежи).

Вариант 2. После каждого платежа долг уменьшается на одну и ту же сумму (дифференцированные платежи).

На сколько рублей меньше Пантелей отдаст банку, если выберет второй вариант?

Задача 32.

а) Матвей и Пантелей положили по 1,6 млн р. в два разных банка. Матвей сделал вклад под $p\%$ годовых. Пантелею банк предложил другие условия: в первые два года процентная ставка на 5% меньше p, а в последующие годы на 5 больше p. К концу четвертого года (т. е. после четвертого начисления процентов) у Матвея на счете было на 9670 р. больше, чем у Пантелея. Найдите p.

б) Корней и Еремей положили по 1,6 млн р. в два разных банка. Корней сделал вклад под $p\%$ годовых. Еремею банк предложил другие условия: в первый два года процентная ставка на 5% больше p, а в последующие годы на 5 меньше p. К концу четвертого года (т. е. после четвертого начисления процентов) у Корнея на счете было на 10 570 р. больше, чем у Еремея. Найдите p.

Задача 33.

а) В июле 2018 года Пантелей планирует взять кредит на 5 лет в размере 5,5 млн р. Условия возврата кредита следующие:

- каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в июне необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2019, 2020, 2021 годов долг остается равным 5,5 млн р.;
- суммы выплат в 2022 и 2023 годов равны.

Общий размер выплат составит 10,5 млн р. Найдите p.

б) В июле 2018 года Корней планирует взять кредит на 5 лет в размере 4,5 млн р. Условия возврата кредита следующие:

- каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в июне необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2019, 2020, 2021 годов долг остается равным 4,5 млн р.;
- суммы выплат в 2022 и 2023 годах равны.

Общий размер выплат составит 9,625 млн р. Найдите p.

Задача 34.

а) Пантелей мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Пантелей может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Пантелею придется 25 лет равными ежемесячными платежами, тогда ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого Пантелей может какое-то время снимать квартиру за 16 тыс. руб. в месяц, откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько лет в этом случае Пантелей сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

б) Корней мечтает о собственной квартире, которая стоит 2,4 млн руб. Корней может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Корнею придется 20 лет равными ежемесячными платежами, тогда ему придется выплатить сумму, на 300% превышающую исходную. Вместо этого Корней может какое-то время снимать квартиру за 15 тыс. руб. в месяц, откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько лет в этом случае Корней сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Задача 35.

а) Пантелей планирует взять в банке кредит на сумму 5 млн р. на срок 8 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в июне необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите целое значение p, при котором наибольший годовой платеж составит не более 1 300 000 р., а наименьший — не менее 700 000 р.

б) Пантелей планирует взять в банке кредит на сумму 8 млн р. на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в июне необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите целое значение p, при котором наибольший годовой платеж составит не более 2 750 000 р., а наименьший — не менее 1 810 000 р.

ГЛАВА III. ЗАДАЧИ НА ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

3.1. Представление о задачах на оптимальный выбор

В жизни нам часто приходится выбирать наилучшее решение из нескольких. Возможности выбора не беспредельны: мы ограничены технологиями, доступными ресурсами, временем и т.д. В школьных задачах такие ограничения обычно выражаются линейными или несложными нелинейными уравнениями и неравенствами. Могут быть ограничения другого вида: например, некоторые величины могут принимать только целые или только натуральные значения.

Прочитав условие задачи, нужно вычленить все зависимости и ограничения и выразить их на языке математики.

Кроме того, нужно определить на языке математики, что значит «наилучший выбор». В задачах экономической тематики часто бывает нужно добиться наибольшей прибыли или наименьших затрат — времени или финансов или других ресурсов. При этом некоторую величину (её обычно называют *целевой функцией*) выражают через переменные и параметры и выясняют, какое экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение эта функция принимает с учётом ограничений. В задаче может спрашиваться, при каких аргументах она его принимает.

Для решения задач используют аналитические методы, графики и соображения делимости. Важно не только найти экстремальное значение, но и обосновать его экстремальность.

Рассмотрим простой пример, в котором нас будет интересовать не столько решение, сколько модель. На этом примере надо будет научиться видеть отдельные элементы математической модели, которые ты строишь для задачи.

Пример 20. Как-то раз Пантелей приобрёл ценную бумагу за 5 тыс. р. Цена бумаги каждый год возрастает на 1,5 тыс. р. В любой момент Пантелей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 15% . В конце какого года после покупки Пантелей должен продать ценную бумагу, чтобы через 20 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение 1.

В любой год состояние Пантелея может увеличиться или на 15% или на 1,5 тыс. рублей. А что больше? Если бумага стоит 10 тыс. р., то поровну, а если она дороже, то проценты по вкладу взять выгодней, чем постоянную прибавку в цене бумаги.

Стоимость бумаги растет год от года, поэтому растет и сумма процентов, а постоянная прибавка не меняется.

Значит, надо поймать момент, когда бумага будет стоить больше 10 тыс. р., и продавать.

Ловить можно разными способами, вот парочка.

Арифметический способ	Алгебраический способ
К концу первого года стоимость бумаги станет равна $5+1{,}5=6{,}5$, к концу второго — $6{,}5+1{,}5=8$; к концу третьего — $8+1{,}5=9{,}5$ а к концу четвертого — $9{,}5+1{,}5=11$, это больше 10.	Обозначим номер года k, $k \in N$, и составим неравенство: $5+1{,}5k>10$; $1{,}5k>5$; $k>3{,}(3)$. А раз k — целое число, то $k=4$.

Ответ. Лучше Пантелею продать бумагу в конце четвертого года.▲

Алгебраический способ «научнее» и допускает различные обобщения, но чаще приводит к ошибкам. Прежде чем переписывать решение из черновика в чистовик, проверь себя арифметическим способом.

Разберемся, как в этом простом примере реализуются введенные нами понятия. Здесь только одна независимая переменная — номер года k, в который будет продана бумага. К концу первого года цена бумаги станет равна $5+1{,}5$, к концу второго — $5+1{,}5\cdot 2$, в к концу k-го — $5+1{,}5k$. За эти деньги Пантелей продает бумагу и делает вклад в банке на всю сумму. В $(k+1)$-ый год начисляются проценты, и величина вклада Пантелея становится равна $(5+1{,}5k)\cdot 1{,}15$, на следующий год — $(5+1{,}5k)\cdot 1{,}15^2$, и наконец, в 20-й год она составит $(5+1{,}5k)\cdot 1{,}15^{20-k}$.

Это и есть целевая функция, $S(k)=(5+1{,}5k)\cdot 1{,}15^{20-k}$. В задаче требуется найти, при каких k эта функция принимает наибольшее значение при следующих ограничениях: $k \in N$, $0<k<20$.

Аргумент k принимает конечное число значений, поэтому можно просто вычислить все значения функции $S(k)$ при $k=1, ..., 19$ и выбрать среди них наибольшее.

Если есть компьютер, это действительно просто. На экзамене компьютеров и калькуляторов нет, поэтому в приведенном решении полного перебора не было, а были логические обоснования: если бумага дороже 10 тыс. р., то проценты по вкладу взять выгодней, чем постоянную прибавку в цене бумаги.

Решение 2. Для работы с функциями целого аргумента помогает такой прием: оценивают частные $\dfrac{S(k)}{S(k-1)}$ — при каких k они больше единицы, при каких меньше. Так удастся найти локальные максимумы и минимумы функции. Можно вместо частного искать разности соседних значений и сравнивать их с нулем — как удобнее, так и поступать.

Вычисляем:

$$\frac{S(k)}{S(k-1)}=\frac{(5+1{,}5k)\cdot 1{,}15^{20-k}}{(5+1{,}5(k-1))\cdot 1{,}15^{20-k+1}}=\frac{5+1{,}5k}{(5+1{,}5(k-1))\cdot 1{,}15}.$$

Решаем неравенство:

$$\frac{S(k)}{S(k-1)}>1;$$

$$\frac{5+1{,}5k}{(3{,}5+1{,}5k)\cdot 1{,}15}>1;$$

$$5+1{,}5k>(3{,}5+1{,}5k)\cdot 1{,}15;$$

$$10+3k>(7+3k)\cdot 1{,}15;$$

$$20+6k>(7+3k)\cdot 2{,}3;$$

$$20-16{,}1>3k\cdot 0{,}3;$$

$$3{,}9>0{,}9k;$$

$$k<\frac{13}{3}.$$

Решая неравенство, мы пользовались тем, что функция принимает только положительные значения. В каком месте? Какими приемами пользовались для упрощения вычислений?

Итак, для $k<\dfrac{13}{3}$ функция возрастает; а при остальных значениях, понятно, не возрастает:

$$S(1)<S(2)<S(3)<S(4);$$
$$S(4)>S(5)>S(6)>...>S(20).$$

Значит, наибольшее значение она принимает при $k=4$.▲

В первом решении удалось быстро перебрать варианты и найти ответ; это решение проще. Если ты видишь простой, ясный и верный путь к ответу — смело ему следуй. Правда, такое решение — как отдельный ключик к отдельному замочку, — его еще подобрать надо.

Второе решение сложнее, зато мощнее, оно обобщается на огромное число других задач. Это универсальная отмычка, и дальше мы научимся с ней обращаться.

Начнем с примеров, где целевую функцию строить просто.

3.2. Простые целевые функции

Пример 21. Корней с Пантелеем организовали кондитерский цех и принимают заказы на изготовление сувенирных пряников. Зависимость количества Q (в штуках) пряников в заказе от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q = 17\,000-200P$, причем $5 \le P \le 85$. Такой заказ приносит доход PQ рублей. Затраты на производство Q пряников составляют $25Q+12\,500$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи пряников и затрат на их производство. Какую назначить цену за пряники, чтобы добиться наибольшей прибыли? Какова эта прибыль?

Решение.

Прикидка. Присмотримся к ограничениям на переменную P: крайние значения 5 и 85 дадут очень маленький доход, а большого дохода следует ожидать где-то подальше от краев. Поэтому для прикидки возьмем значение P «где-то посерединке»; пусть это будет полусумма крайних значений: $P_{\text{наугад}} = \dfrac{5+85}{2} = 45.$

Тогда $Q_{\text{наугад}} = 17\,000 - 200P_{\text{наугад}} = 8\,000.$

Доход равен $P_{\text{наугад}}\,Q_{\text{наугад}} = 360\,000.$

Затраты составляют $25Q_{\text{наугад}} + 12\,500 = 212\,500.$

Прибыль получается $360\,000 - 212500 = 147\,500.$

Максимальная прибыль не может получиться меньше.

Обозначения заданы условием, сразу же перейдем к *построению модели.* Понятно, что целевая функция — это прибыль, ее нужно максимизировать. Прибыль зависит от объема и цены, но из этих двух переменных можно оставить только одну, так как они между собой связаны простым соотношением $Q = 17\ 00 - 200P$. Какую лучше оставить? Цену, потому что вопрос задачи — про цену. Выразим через P доход:

$$PQ = P(17\ 000 - 200P),$$

а также затраты:

$$25Q + 12\ 500 = 25(17\ 000 - 200P) + 12\ 500.$$

Теперь легко построить целевую функцию, выражающую прибыль:

$$S(P) = P(17\ 000 - 200P) - 25(17\ 000 - 200P) - 12\ 500 =$$
$$= (P - 25)(17\ 000 - 200P) - 12\ 500 =$$
$$= 200(P - 25)(85 - P) - 12\ 500.$$

Раскрывать скобки и записывать целевую функцию в стандартном виде многочлена необязательно. Позднее мы увидим, что удобнее оставить ее как есть — проще находить вершину параболы.

Ограничение на переменную P задано условием

$$5 \le P \le 85.$$

В задаче спрашивается, при каких допустимых P значение целевой функции наибольшее. Запишем модель в кратком виде:

$$\begin{cases} S(P) = 200(P - 25)(85 - P) - 12500; \\ 5 \le P \le 85; \\ S(P) \to \text{наиб.} \quad P - ? \end{cases}$$

Работа с моделью. $S(P)$ — квадратичная функция, причем старший коэффициент отрицательный; график этой функции — парабола ветвями вниз. Максимум достигается в вершине параболы; достаточно найти абсциссу P_{max} вершины и убедиться, что она удовлетворяет двойному неравенству (если не удовлетворяет, придется думать, что делать дальше).

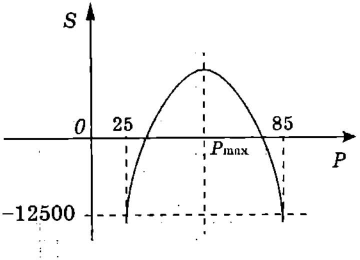
Найти P_{max} можно разными способами.

Способ 1. *Быстрый, ошибкобезопасный и с минимумом расчетов*. Ищем P_{max} из геометрических соображений.

В точках, в которых одна из скобок обращается в 0, значения функции равны:

$$S(25) = S(85) = -12\ 500;$$

значит, точки параболы с абсциссами 25 и 85 симметричны относительно оси симметрии параболы.



Поэтому $P_{max} = \frac{25+85}{2} = \frac{110}{2} = 55$; это значение удовлетворяет ограничению $5 \le P \le 85$.

Способ 2. Алгебраический. Запишем целевую функцию в виде квадратичного трехчлена стандартного вида:

$$S(P)=200(P-25)(85-P)-12\,500 =$$
$$= -200P^2 + 22\,000P - 425\,000.$$

Найдем абсциссу вершины параболы по формуле из школьного учебника:

$$P_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{22\,000}{-2 \cdot 200} = 55.$$

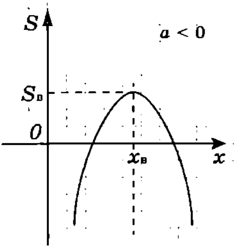
С оптимальной ценой мы разобрались, но нужно еще найти максимальную прибыль. Подставляем и выполняем преобразования так, чтобы все можно было сосчитать устно:

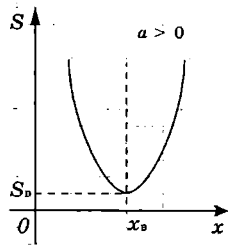
$$S(P_{max}) = 200(P_{max} - 25)(85 - P_{max}) - 12\,500 =$$
$$=200(55 - 25)(85 - 55) - 12\,500 = 200 \cdot 30 \cdot 30 - 12\,500 =$$
$$= 180\,00 - 12\,500 = 167\,500.$$

Проверка. Это значение согласуется с прикидкой.

Ответ. Прибыль 167 500 р. при цене 55 р. за шт.▲

На этом примере мы познакомились с простейшей целевой функцией — квадратичной. Её экстремальное значение соответствует вершине параболы: оно равно ординате вершины, а его аргумент — абсциссе. Когда старший коэффициент квадратичного трехчлена отрицательный, получается максимум, а когда положительный — минимум (см. рис.). Для квадратичной целевой функции вида $S(x) = ax^2+bx+c$ абсцисса вершины равна $x_в = -\frac{b}{2a}$; а значение функции в ней равно $S_в = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Если эти значения не удовлетворяют ограничениям задачи, потребуется дополнительное исследование.





Пример 22. Зависимость количества Q (в штуках) пряников в заказе от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q = 17\,000 - 200P$, причем $5 \le P \le 85$, а $Q \le 5000$. Такой заказ приносит доход PQ рублей. Затраты на производство Q пряников составляют $25Q + 12\,500$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи пряников и затрат на их производство. Какую назначить цену за пряники, чтобы добиться наибольшей прибыли? Какова эта прибыль?

Решение.

Построение модели. Эта задача очень похожа на предыдущую, но отличается одним дополнительным условием $Q \le 5000$. Выведем из него ограничение на P: $17\,000 - 200P \le 5000$, то есть $P \ge 60$. Вот такая модель получится:

$$\begin{cases} S(P) = 200\,(P-25)(85-P) - 12500; \\ 60 \le P \le 85; \\ S(P) \to \text{наиб.}; \quad P - \ ? \end{cases}$$

Работа с моделью. $S(P)$ — квадратичная функция, причем старший коэффициент отрицательный; график этой функции — парабола ветвями вниз. Как мы видели в прошлом примере, максимум достигается в вершине параболы с абсциссой $P_{max} = 55$. Но это значение не удовлетворяет ограничению $60 \le P \le 85$. Как ведет себя целевая функция на этом промежутке? Ее график симметричен относительно прямой $P = 55$ — слева возрастающая ветвь, справа убывающая. Промежуток [60; 85] расположен правее оси симметрии, там функция убывает. Значит, наибольшее значение она принимает в точке $P_{наиб.} = 60$.

Прибыль равна

$S(P_{наиб.}) = 200(60 - 25)(85 - 60) - 12\,500 = 162\,500.$

Ответ. Прибыль 162 500 р. при цене 60 р. за шт.▲

В следующем примере целевая функция — дробно-линейная.

Пример 23. В пряничный цех поступил заказ на изготовление партии сувенирных пряников трех видов: с клубничной начинкой, с вишневой и с шоколадной. Цена пряников с клубничной и вишневой начинкой одинакова, первых заказали на сумму 4000 р., а вторых — 60 штук. Пряники с шоколадной начинкой стоят 150 р. за штуку, их заказали столько же, сколько пряников с вишневой и клубничной начинками вместе. Какова наименьшая стоимость всего заказа? При какой цене на пряники с фруктовой начинкой она достигается?

Решение. Прикидка. Допустим, пряники всех трех видов стоят одинаково, тогда за вишневые заплатили $60 \cdot 150 = 9000$ р., за клубничные — 4000 р., а за шоколадные — столько же, сколько за вишневые и клубничные вместе, то есть 13 000 р. Весь заказ обойдется в 26 000 р. Правда, в нем будет нецелое число пряников, но для прикидки сойдет.

Обозначения. Какие ввести переменные? Судя по вопросам задачи, в качестве целевой функции надо взять стоимость заказа. Значения функции зависят от цены на фруктовые пряники, ее и обозначим буквой x.

Построение модели. Систематизируем данные, собрав их в таблицу.

Начинка	Количество, шт.	Цена за шт., р.	Стоимость, р.
Клубничная	$\frac{4000}{x}$	x	4000
Вишневая	60	x	$60x$
Шоколадная	$\frac{4000}{x}+60$	150	$\left(\frac{4000}{x}+60\right)\cdot 150$

Сложим стоимость всех пряников в заказе и введем целевую функцию $S(x) = 4000 + 60x + \left(\frac{4000}{x}+60\right)\cdot 150$. В модели ещё учтем, что некоторые величины натуральные:

$$\begin{cases} S(x)=4000+60x+\left(\dfrac{4000}{x}+60\right)\cdot 150; \\ \dfrac{4000}{x}\in N; \quad 100x\in N; \\ S(x)\to \text{наим}; \quad x-? \end{cases}$$

Работа с моделью. Упростим целевую функцию:

$$S(x)=4000+60x+\left(\frac{4000}{x}+60\right)\cdot 150=13\,000+60x+\frac{600\,000}{x}=$$

$$=13\,000+60\cdot\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)=13\,000+60\cdot S_1(x),$$

где $S_1(x)=x+\dfrac{10\,000}{x}$. Функция $S_1(x)$ принимает наименьшее значение там же, где $S(x)$, а исследовать ее проще. Достаточно вспомнить, что среднее арифметическое двух чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{A+B}{2}\geq\sqrt{AB} \text{ или } A+B\geq 2\sqrt{AB}.$$

Равенство достигается тогда, когда $A = B$.

Используем это утверждение для оценки $S_1(x)$:

$$S_1(x)=x+\frac{10\,000}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{10\,000}{x}}=2\cdot 100.$$

Это и есть наименьшее значение $S_1(x)$, оно достигается при $x=\dfrac{10\,000}{x}$, то есть $x=100$. Условия $\dfrac{4000}{x}\in N$; $100x\in N$ выполнены.

Остается вычислить наименьшее значение $S(x)$:

$$S(100)=13\,000+60\cdot\left(100+\frac{10\,000}{100}\right)=13\,000+60\cdot 200=25\,000.$$

Это значение согласуется с прикидкой.

Ответ. Стоимость заказа 25 000 р.; цена пряников с фруктовой начинкой составляет 100 р. за шт.

Наименьшее значение дробно-линейной функции $f(x)=x+\frac{A}{x}$ часто находят с помощью производной, но здесь использован другой способ. Обрати внимание: мало показать, что при положительных x функция ограничена снизу:

$$f(x)=x+\frac{A}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{A}{x}}=2\sqrt{A}.$$

Надо еще доказать, что это наименьшее значение достигается. Для этого достаточно указать аргумент, в котором оно достигается ($x=\sqrt{A}$), и убедиться, что ограничения модели удовлетворяются.

В рассмотренных примерах были удачно подобраны данные, но так бывает не всегда.

Пример 24. Корней с Пантелеем окупили затраты на открытие производства пряников и расширили дело, теперь у них два цеха. В эти два цеха нужно распределить 23 работника. Если в первом цехе работает t человек, то их месячная зарплата составляет $2t^2$ тыс. р.; а если во втором цехе работает t человек, то их месячная зарплата составляет t^2 тыс. р. Как нужно распределить рабочих, чтобы выплаты на их месячную зарплату оказались наименьшими? Сколько в этом случае придется заплатить рабочим?

Ошибочное рассуждение. Во втором цехе зарплата меньше (так как $t^2 < 2t^2$), поэтому всех рабочих надо направить во второй цех. Всем им придется заплатить 23^2 тыс. р.

Это рассуждение неверно, поскольку зарплата зависит от числа сотрудников нелинейно (это условие задачи не очень правдоподобно). Если сотрудников очень много, выплаты им растут очень быстро. Придется не направлять очень много сотрудников в один цех. Будем рассуждать иначе.

Решение.

Прикидка. Возьмем для примера какие-нибудь числа. Одно из них — 10, чтобы было легче считать. Второе тогда 13. В первый цех направим поменьше народу, а во второй цех побольше, ведь там зарплата меньше.

Расходы на месячную зарплату в таком случае равны $2\cdot 10^2+13^2=369$.

В ответе должно получиться число несколько меньше.

Обозначение. В этой задаче придется самостоятельно строить целевую функцию. Минимизировать нужно выплаты по зарплате, а в качестве независимой переменной разумно выбрать или число рабочих в первом цехе, или число рабочих во втором. Именно это число спрашивается в задаче. Будем считать, что в первом цехе работает x человек.

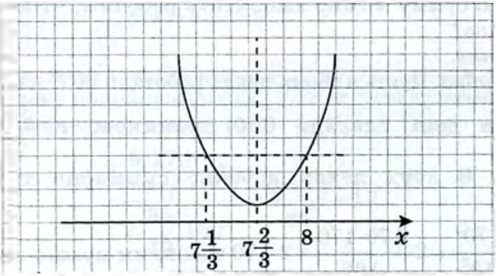
Построение модели. В месяц рабочим первого цеха нужно выплатить $2x^2$ тыс. р. Во второй цех останется направить $(23 - x)$ человек и заплатить им $(23 - x)^2$ тыс. р. Общие выплаты всем рабочим — это и есть целевая функция:

$$S(x) = 2x^2 + (23 - x)^2 = 3x^2 - 46x + 23^2.$$

Нужно найти наименьшее значение этой функции. Ограничения на переменную тоже нужно задать самостоятельно. Число рабочих и в первом, и во втором цехе может быть только натуральным: $x \in N$, $0 \le x \le 23$. Модель составлена:

$$\begin{cases} S(x) = 3x^2 - 46x + 23^2; \\ x \in N, \quad 0 \le x \le 23; \\ S(x) \to \text{наим.}; \quad S - ? \end{cases}$$

Работа с моделью. График функции $S(x)$ — парабола с ветвями вверх. Вершина параболы — в точке $x_в = \frac{46}{6} = 7\frac{2}{3}$. Это число удовлетворяет двойному неравенству $0 \le 7\frac{2}{3} \le 23$, но явно не натуральное.



При $x \le 7$ функция убывает, а при $x \ge 8$ возрастает, поэтому наименьшее значение — или $S(7)$, или $S(8)$. Сравним эти значения:

$\boxed{A{\cdot}B}$ $S(8) - S(7) = 3 \cdot 8^2 - 46 \cdot 8 + 23^2 - 3 \cdot 7^2 + 46 \cdot 7 - 23^2 =$
$= 3(8^2 - 7^2) - 46(8 - 7) = 3(8 - 7)(8 + 7) - 46 = 45 - 46 < 0.$

Раз $S(8) < S(7)$, наименьшее значение функция $S(x)$ принимает при $x = 8$.

В первый цех надо направить 8 рабочих, а во второй — 15 рабочих. Во втором цехе рабочих больше, и это логично, там ведь зарплата ниже. Всем 23 рабочим нужно выплатить

$$2 \cdot 8^2 + 15^2 = 353 \text{ (тыс. р.)}.$$

Ответ. В первый цех — 8 рабочих, во второй цех — 15 рабочих. 353 тыс. р.

Почти такое же условие в следующем примере. Тоже надо минимизировать выплаты, но теперь ограничение не в числе сотрудников, а в количестве произведенной продукции.

Зарплата пропорциональна времени работы (что привычно), но вот производительность не постоянна: со временем производительность труда любого рабочего падает. Последнее не согласуется с привычными представлениями, поэтому иногда в этой задаче рассуждают неверно.

Пример 25. В двух цехах производятся одинаковые пряники, но во втором (более новом) цехе оборудование лучше. Если в первом цехе рабочие трудятся суммарно t^2 часов в день, то производят $300t$ пряников; а во втором за те же t^2 часов в день рабочие производят $350t$ пряников. За каждый час работы (в любом цехе) рабочему платят 150 рублей. В понедельник поступил заказ на 8500 пряников. Какую наименьшую сумму можно выплатить рабочим, чтобы выполнить заказ?

Решение.

Прикидка. Пусть в обоих цехах работали по t^2 часов, тогда всего за день сделали $650t$ пряников, $t = \frac{8500}{650}$ или $t = \frac{170}{13}$. В двух цехах рабочие суммарно трудились $2t^2 = 2 \cdot \frac{170^2}{13^2} = 2 \cdot \frac{170 \cdot 170}{169} \approx 2 \cdot 170$ часов, им нужно заплатить около

$$2 \cdot 170 \cdot 150 = 170 \cdot 300 = 51\,000 \text{ р.}$$

Обозначения. Пусть в первом цеху рабочие трудились суммарно x^2 часов, а во втором — y^2 часов.

Построение модели. Рабочие сделали $300x + 350y$ пряников; это весь заказ, то есть 8500 штук. Вот и уравнение:

$$300x + 350y = 8500 \text{ или } 6x + 7y = 170.$$

Из этого уравнения выразим одну из переменных: $y = \dfrac{170-6x}{7}$.

Установим ограничения исходя из здравого смысла: $x \geq 0$; $y \geq 0$. Раз уж мы планируем работать с одной переменной, преобразуем второе неравенство: $\dfrac{170-6x}{7} \geq 0$ или $x \leq \dfrac{170}{6}$.

Выплаты рабочим составляют $150(x^2 + y^2)$ р., а целевую функцию выразим через одну переменную:

$$S(x) = 150\left(x^2 + \left(\frac{170-6x}{7}\right)^2\right);$$

$$S(x) = 150\left(\frac{85}{49}x^2 - 2\cdot\frac{6\cdot170}{7\cdot7}x + \left(\frac{170}{7}\right)^2\right).$$

Получилась такая модель:

$$\begin{cases} S(x) = 150\left(\dfrac{85}{49}x^2 - 2\cdot\dfrac{6\cdot170}{7\cdot7}x + \left(\dfrac{170}{7}\right)^2\right); \\ 0 \leq x \leq \dfrac{170}{6}; \\ S(x) \to \text{наим.}; \quad S - ? \end{cases}$$

Работа с моделью. Функция $S(x)$ квадратичная, старший коэффициент положительный, поэтому она принимает наименьшее значение в точке

$\frac{A}{B}\cdot B$

1) : 2) ×

$$\frac{2\cdot\dfrac{6\cdot170}{7\cdot7}\cdot150}{2\cdot\dfrac{85}{49}\cdot150} = \frac{6\cdot170}{85} = 12.$$

Обязательно проверим, что это значение удовлетворяет ограничениям. Действительно, $0 \leq 12 \leq \dfrac{170}{6}$ — верное двойное неравенство.

Осталось найти наименьшее значение. Счет муторный, но если выносить побольше множителей за скобки, можно справиться устно:

$$S(12)=150\cdot\left(\frac{85}{49}\cdot 12^2-2\cdot\frac{6\cdot 170}{7\cdot 7}\cdot 12+\frac{170^2}{49}\right)=$$

$$=150\cdot\frac{85}{49}\cdot\left(12^2-2\cdot 6\cdot 2\cdot 12+170\cdot 2\right)=$$

$$=150\cdot\frac{85}{49}\cdot 4\left(36-72+85\right)=150\cdot\frac{85}{49}\cdot 4\cdot 49=150\cdot 85\cdot 4=$$

$$=300\cdot 170=51\,000.$$

Другой способ — найти y и вычислить $150(x^2+y^2)$. Вот что получится:

$$y=\frac{170-6x}{7}=\frac{170-6\cdot 12}{7}=\frac{98}{7}=14;$$

$$150(x^2+y^2)=150(12^2+14^2)=$$
$$=150\cdot 4(6^2+7^2)=600\cdot 85=51\,000.$$

Ответ. 51 000.

Проверка. Согласие с прикидкой настолько полное, что даже настораживает.

В этой задаче объем продукции был задан, и нужно было минимизировать расходы. Решим обратную задачу: расходы заданы, требуется максимизировать выпуск продукции. Может показаться, что модель очень похожа, но это не так. В первых примерах была одна независимая переменная, а целевая функция зависела только от неё. В более сложных примерах было непонятно, какую переменную выбрать, поэтому мы вводили несколько переменных и связали их уравнениями. Нам везло: уравнения были линейными, из них легко одна переменная выражалась через другую. Целевую функцию мы выражали через эту единственную переменную.

3.3. Целевая функция, зависящая от двух переменных

Пример 26. В двух цехах производятся одинаковые пряники, но во втором (более новом) цехе оборудование лучше. Если в первом цеху рабочие трудятся суммарно t^2 часов в день, то производят $300t$ пряников; а во втором за те же t^2

часов в день рабочие производят $400t$ пряников. За каждый час работы (в любом цехе) рабочему платят 150 рублей, а суммарные ежедневные выплаты рабочим составляют 60 000 р. Какое максимальное количество пряников может быть выпущено в обоих цехах за день?

Ошибочное рассуждение: во втором цехе производительность выше, лучше всех рабочих туда и отправить.

Оказывается, не лучше. Производительность не пропорциональна времени, она нелинейно от него зависит. Когда времени затрачено очень много, то производительность падает, поэтому лучше все же разделить рабочих.

Решение.

Обозначения. Начнем вводить обозначения, как и в прошлом примере: в первом цеху рабочие суммарно трудились x^2 часов, а во втором — y^2 часов.

Построение модели. За день они сделали $300x + 400y$ пряников. Связь между переменными теперь другая: $150(x^2 + y^2) = 60\,000$, или $x^2 + y^2 = 400$. Есть ограничения здравого смысла: $x \geq 0$; $y \geq 0$. Максимизировать нужно выпуск продукции, $S(x, y) = 300x + 400y$.

Вот такая модель получилась:

$$\begin{cases} S(x,y) = 300x + 400y; \\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ x^2 + y^2 = 400; \\ S(x,y) \to \text{наиб.};\quad S - ? \end{cases}$$

Прикидка. Пусть в обоих цехах рабочие трудились поровну, по t^2 часов, $2t^2 = 400$. Тогда $t \approx 14$. Рабочие сделают примерно $300 \cdot 14 + 400 \cdot 14 = 700 \cdot 14 = 9800$ пряников.

Работа с моделью.

Целевая функция зависит от двух переменных, это трудный случай. Решать задачу можно разными способами, они обобщаются в разных ситуациях.

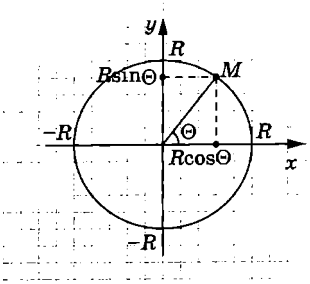
Способ 1. Раз переменные x, y неотрицательны, можно выразить одну через другую: $y = \sqrt{400 - x^2}$, модель принимает такой вид:

$$\begin{cases} S(x) = 300x + 400\sqrt{400 - x^2}; \\ x \geq 0;\ y \leq 20;\ S(x) \to \text{наиб.} \end{cases}$$

Теперь целевая функция зависит только от одной переменной. Её можно исследовать с помощью производной —

простое упражнение для тех, кто владеет этой мощной техникой. Серьезно изучить ее в этой книжке нет никакой возможности, сделаю только одно замечание. К сожалению, эту технику часто применяют так: находят производную, приравнивают к нулю, решают полученное уравнение и записывают в ответ его корень. Этого мало. Обязательно нужно еще доказывать, что полученное значение — точка экстремума (максимума или минимума).

Способ 2. Попробуем графический подход. Если трактовать пару x, y как координаты точки на плоскости, то уравнение $x^2 + y^2 = 400$ задает окружность радиуса $R = 20$. Любую точку M на окружности можно задать одним параметром — углом Θ, $0 \le \Theta \le 2\pi$.



Тогда $x = R\cos\Theta$, $y = R\sin\Theta$. По смыслу эти величины положительны, поэтому можно считать, что $0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$.

Модель теперь выглядит так:

$$\begin{cases} S(\Theta) = 300 \cdot 20\cos\Theta + 400 \cdot 20\sin\Theta; \\ 0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2};\ S(\Theta) \to \text{наиб.}, S\ -\ ? \end{cases}$$

Целевую функцию можно чуть упростить: $S(\Theta) = 2000(3\cos\Theta + 4\sin\Theta)$. В скобках стоит линейная комбинация двух функций, но есть стандартный способ оставить только одну; для этого вводят вспомогательный угол.

Сначала коэффициенты при синусе и косинусе делят и умножают на сумму их квадратов:

$$S(\Theta)=2000\cdot\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos\Theta+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin\Theta\right)=$$

$$=10\,000\left(\frac{3}{5}\cos\Theta+\frac{4}{5}\sin\Theta\right).$$

Получаются очень удачные коэффициенты $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$, сумма их квадратов равна 1, а значит, существует такой угол φ, что эти коэффициенты — его синус и косинус, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$. Теперь в скобках тригонометрическая формула:

$$S(\Theta)=10\,000(\sin\varphi\cdot\cos\Theta+\cos\varphi\cdot\sin\Theta)=10\,000\sin(\varphi+\Theta).$$

Синус больше единицы не бывает, и теперь очевидно, что $S(\Theta)\le 10\,000$ для всех Θ. Если функция $S(\Theta)$ принимает значение 10 000, то оно и есть наибольшее. Достаточно привести подходящий пример. Посмотрим, какие условия достаточны: $\sin(\varphi+\Theta)=1$, $\varphi+\Theta=\frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi=\cos\Theta$, $\cos\varphi=\sin\Theta$.

Можно взять $\sin\Theta=\frac{4}{5}$, $\cos\Theta=\frac{3}{5}$, тогда

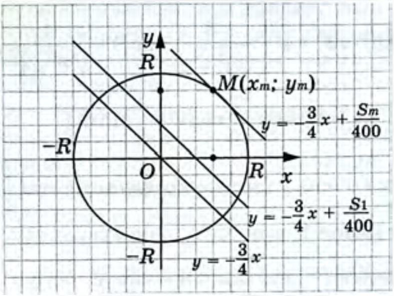
$$S(\Theta)=300\cdot 20\cdot\frac{3}{5}+400\cdot 20\cdot\frac{4}{5}=10\,000.$$

Метод вспомогательного угла бывает полезным и для решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Способ 3. Этот способ тоже опирается на графическое представление задачи. Опять нарисуем окружность $x^2+y^2=400$ радиуса 20. Нарисуем еще несколько прямых вида $s=300x+400y$ при разных s. Если это уравнение выглядит непривычно, можно записать его по-другому:

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{400}s.$$

Переведем условие задачи на графический язык. Ограничения задают точки на окружности $x^2+y^2=400$, в той ее четверти, где $x\ge 0$; $y\ge 0$. Нужно найти наибольшее значение параметра s такое, что прямая $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{400}s$ проходит хотя бы через одну точку четверти окружности.



Прямая, заданная таким уравнением, пересекает ось y в точке с ординатой $\frac{s}{400}$. Чем больше s, тем выше эта точка. Будем двигать прямую $y=-\frac{3}{4}x$ вверх, пока у нее будет оставаться общая точка с окружностью. Сначала прямая будет пересекать окружность в двух точках, потом останется только одна — точка касания, и это предел. Если подвинуть прямую еще выше, то общих точек не останется (см. рис.). Значит, наибольшее значение параметра s задается точкой касания $M(x_m, y_m)$. Как ее найти?

Способ 3а. Ее можно определить из таких двух условий:

1) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;

2) точка M лежит на окружности $x^2 + y^2 = 400$.

Выведем уравнения из этих условий.

Запишем уравнение прямой OM, на которой лежит радиус, проведенный в точку касания: $y=\frac{y_m}{x_m}x$. Условие 1) о перпендикулярности прямых $y=\frac{y_m}{x_m}x$ и $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{400}s$ заключается в том, что произведение угловых коэффициентов равно -1:

$$y_m=\frac{4}{3}x_m\ ;\quad -\frac{3}{4}\cdot\frac{y_m}{x_m}=-1.$$

По условию 2) точка с такими координатами лежит на окружности $x^2 + y^2 = 400$:

$$x_m^2 + \left(\frac{4}{3}x_m\right)^2 = 400;$$

$$(3x_m)^2 + (4x_m)^2 = 3^2 \cdot 400;$$

$$25x_m^2 = 3^2 \cdot 400.$$

Координаты точки M положительны, $x_m > 0$, поэтому

$$5x_m = 3 \cdot 20;$$
$$x_m = 3 \cdot 4;$$
$$x_m = 12.$$

Тогда $y_m = \frac{4}{3}x_m = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16.$

Осталось найти такое значение s, что точка с координатами (x_m, y_m) лежит на прямой $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{400}s$ или, что то же самое, $s = 300x + 400y$:

$$s = 300x_m + 400y_m = 300 \cdot 12 + 400 \cdot 16 = 10\,000.$$

Способ 3б. Если прямая касается окружности, то существует только одна пара чисел, удовлетворяющих и уравнению окружности и уравнению прямой. Добавим еще условие, что у точки должны быть положительные координаты, и получим требование, что у следующей системы должно быть решение, и притом единственное:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{400}s; \\ x^2 + y^2 = 400; \\ x \geq 0; \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Нужно найти наибольшее значение параметра s, при котором это требование выполняется. Подставим выражение для y из первого уравнения во второе:

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{400}s\right)^2 = 400;$$

или

$$\frac{25}{16}x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{400}sx + \left(\frac{1}{400}s\right)^2 - 400 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x с параметром s. Нас интересует наибольшее значение параметра, при котором корень единственный. Для этого дискриминант должен быть равен 0. Найдем его:

$$D=\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{400}\right)^2\cdot s^2-4\cdot\frac{25}{16}\cdot\left(\left(\frac{1}{400}s\right)^2-400\right)=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{400}\right)^2\cdot s^2-\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{400}\right)^2\cdot s^2+\frac{25}{4}\cdot 400=$$

$$=-\frac{16}{4}\left(\frac{1}{400}\right)^2\cdot s^2+25\cdot 100=2500-\frac{s^2}{40\,000}.$$

Дискриминант обращается в 0, когда $s^2 = 2500\cdot 40\,000$. По смыслу задачи нас интересуют только положительные значения параметра, поэтому $s = 50 \cdot 200 = 10\,000$.

Итак, если $s < 10\,000$, то дискриминант отрицателен, решений системы нет, а у прямой нет общих точек с окружностью. Значение $s = 10\,000$ достигается; это можно доказать, указав подходящие значения $(x; y)$.

Найдем их, решив уравнение

$$\frac{25}{16}x^2-2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{400}\cdot 10\,000x+\left(\frac{10\,000}{400}\right)^2-400=0.$$

Решение, как и ожидалось, единственное:

$$x=12.$$

Решая задачу этим способом, мы перешли к геометрической модели, а затем ввели параметр. Нужно было найти максимальное значение параметра, при котором выполняется геометрическое условие: у прямой и окружности только одна общая точка. Этот способ можно обобщить и получить еще один метод решения задач на оптимальный выбор. Его хорошо применять в тех случаях, когда выражение для целевой функции выглядит проще, чем условия на переменные. Необязательно переходить к геометрической модели. Можно сразу объявить значение целевой функции параметром, выразить через него переменные и искать экстремальное (минимальное или максимальное) значение параметра, при котором выполняются условия на переменные. Так и сделаем.

Способ 4.

Еще раз посмотрим на модель

$$\begin{cases} S(x,y)=300x+400y; \\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ x^2+y^2=400; \\ S(x,y)\to \text{наиб.};\qquad S-? \end{cases}$$

Требуется найти такую пару (x, y), что значение S наибольшее. Переставим акценты: будем считать s параметром и найдем наибольшее значение s, при котором существует пара (x, y), удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} s=300x+400y; \\ x\ge 0;\quad y\ge 0;\quad x^2+y^2=400. \end{cases}$$

А потом, зная s, найдем x, y. Мы выясним, существует ли решение почти так же, как в способе 3б. Выразим y из первого уравнения и подставим во второе (мы это уже делали):

$$x^2+\left(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{400}s\right)^2=400;$$

$$D=2500-\frac{s^2}{40\,000}.$$

При $s > 10\,000$ дискриминант отрицателен, система не имеет решений.

Таким образом, мы показали, что s не может быть больше 10 000. Если теперь покажем, что s может быть равно 10 000, то тем самым найдем наибольшее возможное значение параметра. Как это показать? Подставим значение $s = 10\,000$ и убедимся, что система имеет решение:

$$\begin{cases} 10\,000=300x+400y; \\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ x^2+y^2=400. \end{cases}$$

Мы эту систему уже решали и знаем, что решение существует:

$$x = 12,\ y = 16.$$

Именно при этих значениях достигается наибольшее значение $S(x, y)$, равное 10 000.

Ответ. 10 000.▲

Прием «Двигай прямую» из решения третьим способом хорошо обобщается на случаи, когда целевая функция линейно зависит от двух переменных. Такой графический подход мгновенно приводит к ответу. Но обосновывать решение может быть нелегко. Разумно решить задачу на черновике графически, а в чистовик перенести алгебраическое решение. Фактически ты решишь задачу двумя способами, и вероятность ошибиться существенно снизится.

Пример 27. Первый сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $4t$ Гбайт информации, а второй сервер после обработки полученных на входе t^2 Гбайт информации выдаёт на выходе $7,5t$ Гбайт информации. Какой наибольший объём (в Гбайтах) информации могут после обработки выдать на выходе оба сервера, если известно, что суммарный объём полученной ими на входе информации равен 289 Гбайт и $5 < t < 35$? Укажите, сколько Гбайт информации при этом получено на входе каждым сервером.

Решение.

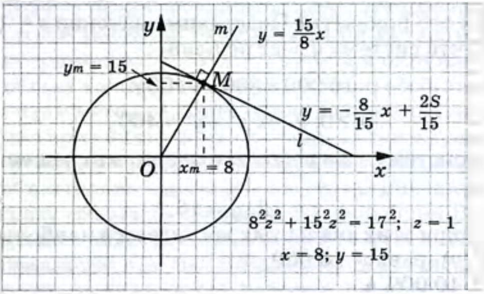
Обозначим x^2 Гбайт количество информации, полученное первым сервером, а y^2 Гбайт — вторым.

Построение модели. По условию $x^2 + y^2 = 289$, $5 \le x \le 35$; $5 \le y \le 35$.

Требуется найти наибольшее значение $S(x, y) = 4x + 7,5y$.

$$\begin{cases} S(x,y) = 4x + 7,5y; \\ 5 \le x \le 35; \quad 5 \le y \le 35; \quad x^2 + y^2 = 289; \\ S(x,y) \to \text{наиб.}; \quad x^2 - ?, \ y^2 - ? \end{cases}$$

Графическое решение (в черновике).



Объяснения к рисунку. Требуется найти наибольшее значение параметра s такое, что прямая $s = 4x + 7,5y$ имеет общую точку с окружностью. Для этого начертим окружность $x^2 + y^2 = 289$ радиусом 17 и проведем к ней касательную l с уравнением $s = 4x + 7{,}5y$ или $y = -\frac{8}{15}x + \frac{2s}{15}$.

Угловой коэффициент этой прямой равен $k_l = -\frac{8}{15}$. Проведем прямую m в точку M касания, ее угловой коэффициент $k_m = \frac{15}{8}$, так как для перпендикулярных прямых $k_m \cdot k_l = -1$.

Уравнение прямой m: $y = \frac{15}{8}x$. Координаты (x_m, y_m) точки M имеют вид $(8z,\ 15z)$. Она лежит на окружности, поэтому $(8z)^2 + (15z)^2 = 289$, откуда $z = 1$, $x = 8$, $y = 15$.

Оформление решения. Найдем, при каких s существует решение системы

$$\begin{cases} s = 4x + 7{,}5y; \\ x^2 + y^2 = 289; \\ 5 \le x \le 35;\ 5 \le y \le 35, \end{cases}$$

и выберем из них наибольшее. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = \frac{2s}{15} - \frac{8}{15}x; \\ x^2 + \left(\frac{2s}{15} - \frac{8}{15}x\right)^2 = 289; \\ 5 \le x \le 35;\ 5 \le y \le 35. \end{cases}$$

Исследуем квадратное уравнение $x^2 + \left(\frac{2s}{15} - \frac{8}{15}x\right)^2 = 289$ относительно x. У него существует решение, когда $D \ge 0$.

$$x^2 + \left(\frac{2s}{15} - \frac{8}{15}x\right)^2 = 289;$$

$\boxed{\frac{A}{B}\cdot B}$

$$15^2x^2 + 8^2x^2 - 2\cdot 2\cdot 8sx + 4s^2 - (15)^2\cdot 289 = 0;$$

$$17^2x^2 - 2\cdot 2\cdot 8sx + 4s^2 - (15\cdot 17)^2 = 0;$$

$$\frac{D}{4}=16^2s^2-17^2\left(4s^2-(15\cdot 17)^2\right).$$

$\boxed{A\cdot B}$

$$D\ge 0\Leftrightarrow(16^2-34^2)s^2+17^4\cdot 15^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$(34-16)(34+16)s^2\le 17^4\cdot 15^2\Leftrightarrow$$

$$18\cdot 50s^2\le 17^4\cdot 15^2\Leftrightarrow$$

$$4\cdot 3^2\cdot 5^2s^2\le 17^4\cdot 15^2\Leftrightarrow$$

$$4\cdot s^2\le 17^4\Leftrightarrow$$

$$|s|\le\frac{17^2}{2}\Leftrightarrow-\frac{17^2}{2}\le s\le\frac{17^2}{2}.$$

Наибольшее возможное значение $s=\dfrac{17^2}{2}$.

Найдем x, подставив в уравнение найденное значение s:

$\boxed{\frac{A}{B}\cdot B}$

$$17^2x^2-2\cdot 2\cdot 8\cdot\frac{17^2}{2}x+4\frac{17^4}{4}-(15\cdot 17)^2=0;$$

$$x^2-16x+17^2-15^2=0;$$

$\boxed{A\cdot B}$

$$x^2-16x+(17-15)\cdot(17+15)=0;$$

$$x^2-16x+64=0;$$

$$x=8.$$

Тогда

$$y=\frac{2s}{15}-\frac{8}{15}x=\frac{2}{15}\cdot\frac{17^2}{2}-\frac{8}{15}\cdot 8=$$

$$=\frac{17^2-8^2}{15}=\frac{(17-8)(17+8)}{15}=\frac{9\cdot 25}{15}=15.$$

Проверим, что неравенства $5\le x\le 35$; $5\le y\le 35$ выполняются:

$$5\le 8\le 35;\ 5\le 15\le 35.$$

На входе серверы получили $x^2=8^2=64$ (Гбайт), $y^2==15^2=225$ (Гбайт).

Осталось вычислить объём информации на выходе:

$$S(x,y)=4x+7{,}5y=4\cdot 8+7{,}5\cdot 15=144{,}5.$$

Ответ. Наибольший объем на выходе — 144,5 Гбайт; при этом на 1 сервере на входе 64 Гбайт; на 2 сервере — 225 Гбайт. ▲

Как ни странно, когда ограничения имеют вид линейных неравенств, решение проще не становится.

Пример 28. Кондитерский цех выпускает сувенирные пряники двух типов: типа М и типа Р. Для изготовления пряника типа М требуется 70 г шоколадной глазури и 50 г кокосовой стружки; а для изготовления пряника типа Р требуется 40 г шоколадной глазури и 60 г кокосовой стружки. В день на фабрику привозят 52 кг шоколадной глазури и 56 кг кокосовой стружки.

Каждый пряник типа М приносит хозяевам 18 р. прибыли, а типа Р — 20 р. прибыли. Какую наибольшую прибыль могут приносить пряники за день? Сколько пряников типа М и типа Р надо для этого выпустить?

Решение.

Прикидка. Для прикидки посчитаем средние арифметические. На один средний пряник требуется примерно 55 г шоколадной глазури и столько же кокосовой стружки; если считать, что глазури и стружки каждый день привозят примерно по 55 кг, то всего получится примерно 1000 пряников. Каждый из них приносит примерно $\frac{18+20}{2}=19$ р. прибыли, всего около $19\cdot1000 = 19\,000$ р. Ответ должен получиться несколько больше.

Обозначения. Пусть на фабрике за день выпускают x пряников типа М и y пряников типа Р.

Построение модели. Прибыль от продажи пряников обозначим $S(x, y)$, $S(x, y) = 18x + 20y$.

Дневное производство ограничено запасами шоколадной глазури: $70x + 40y \le 52\,000$, а также запасами кокосовой стружки: $50x + 60y \le 56\,000$. Пряники – штучный товар, их количество выражается натуральным числом. Получаем следующую модель:

$$\begin{cases} S(x,y)=18x+20y; \\ 70x+40y\le 52\,000; \quad 50x+60y\le 56\,000; \\ S\to \text{наиб. } x\in N, \quad y\in N;\ x,\ y-? \end{cases}$$

Работа с моделью. На координатной плоскости начертим прямые

$$70x + 40y = 52\,000;\ 50x + 60y = 56\,000.$$

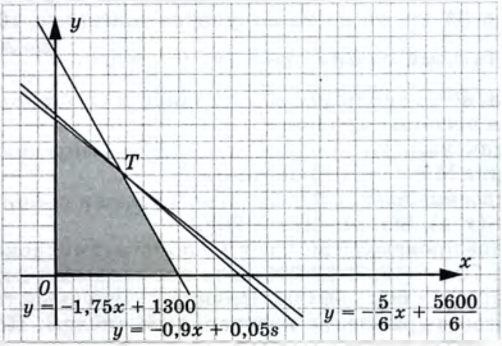
Удобно выразить из этих уравнений y:

$$y=-1{,}75x+1300; \quad y=-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\cdot 5600.$$

По условиям задачи нас интересуют целочисленные точки в первой четверти координатной плоскости ниже этих двух прямых; эта область на рисунке заштрихована.

Применим опять прием «двигай прямую»: начертим прямую $18x + 20y = 0$ или $y = -0{,}9x$ и будем двигать ее вверх до тех пор, пока у нее будет оставаться хотя бы одна общая точка с заштрихованной областью. Двигая прямую вверх, мы максимизируем значение $S(x, y)$. Мы следим за тем, чтобы у прямой оставались общие целочисленные точки с заштрихованной областью: это гарантирует, что выполняются ограничения. Получим семейство прямых $y = -0{,}9x + 0{,}05s$ для разных значений параметра s. По рисунку видно, что значение s максимально тогда, когда прямая $y = -0{,}9x + 0{,}05s$ проходит через точку T пересечения прямых

$$y = -1{,}75x + 1300; \quad y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\cdot 5600.$$



Найдём координаты этой точки. Может быть, нам повезёт, они окажутся целочисленными, и тогда мы найдём s. Если не повезёт, потребуется дополнительное исследование. Чтобы найти координаты точки T, решим систему

$$\begin{cases} y = -1{,}75x + 1300; \\ y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{6}\cdot 5600. \end{cases}$$

$$-1{,}75x + 1300 = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\cdot 5600;$$

$$-21x+12\cdot 1300=-10x+2\cdot 5600;$$
$$15\,600-11\,200=11x;$$
$$4400=11x;$$
$$x=400.$$

Тогда $y=-1{,}75\cdot 400+1300=1300-700=600$. Нам повезло: координаты оказались целочисленными, $T(400;\,600)$.

Коэффициент прямой l_3 заключён между коэффициентами прямых l_1 и l_2 $\left(-1{,}75<-0{,}9<-\frac{5}{6}\right)$, она «лежит между ними».

Найдем, при каком значении параметра s прямая $s=18x+20y$ проходит через точку T: $s=18\cdot 400+20\cdot 600=$ $=7200+12\,000=19\,200$. Если $s>19\,200$, то прямая не имеет общих точек с заштрихованной областью. Значит, наибольшее возможное значение числа $S(x,\,y)$ равно 19 200; а достигается оно при $x=400$ и $y=600$.

Проверка. Очень похоже на результат, полученный прикидкой.

Ответ. 19 200.▲

В этой задаче нам повезло: координаты точки T целые и удовлетворяют условиям на x и y. Если бы они были дробными, пришлось бы еще чуть-чуть поработать: найти целочисленные точки вблизи T, выбрать среди них самую подходящую, провести через нее прямую l_3 и показать, что это оптимальный выбор.

Такая ситуация – в следующем примере.

Пример 29. Авдей должен купить сувенирных пряников для участников конференции. На фабрике ему предложили пряники двух типов: М и Р. Пряники типа М стоят 200 р. за штуку, их продают в коробках по 12 штук. Пряники типа Р стоят 180 р. за штуку, их продают в коробках по 16 штук. Какой наименьшей суммы хватит Авдею, если ему нужно купить не менее 200 пряников?

Решение 1.

Прикидка. Оценим сумму покупки снизу: если бы пряники продавались не коробками, а поштучно, то Авдей купил бы 200 самых дешевых пряников по 180 р., потратив на это $180\cdot 200=36\,000$ р. В ответе должно получиться число несколько большее.

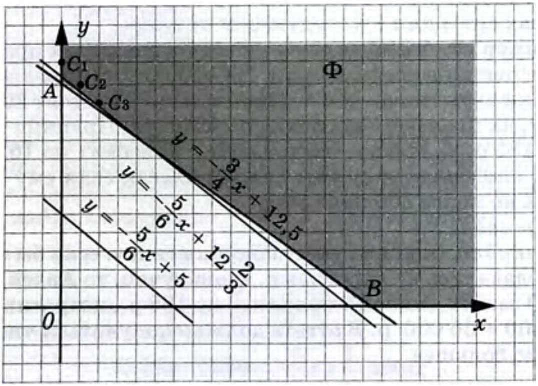
Обозначения. Пусть Авдей купил x коробок пряников типа М и y коробок пряников типа Р. Переменные принимают целые неотрицательные значения.

Построение модели. Всего получилось $12x + 16y$ пряников, это число должно быть не меньше $200: 12x + 16y \geq 200$.

Эти пряники стоят $S(x, y) = 200 \cdot 12x + 180 \cdot 16y$ р., эту величину нужно минимизировать. Получаем систему:

$$\begin{cases} S(x;y) = 2400x + 2880y, \\ x \in N, \quad y \in N, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 3x + 4y \geq 50, \\ S(x,y) \to \text{наим.}; \ S - ? \end{cases}$$

Работа с моделью. Изобразим данные задачи на координатной плоскости. Начертим прямую $3x + 4y = 50$; или, что то же самое, $y = -\frac{3}{4}x + 12\frac{1}{2}$. Она пересекает оси координат в точках $A(0; 12{,}5)$ и $B\left(\frac{50}{3}; 0\right)$. Нас интересуют точки выше этой прямой, причем только целочисленные и из первой четверти, так как переменные могут принимать только натуральные значения. Обозначим эту область Ф, на рисунке она заштрихована. Она ограничена отрезком AB, который входит в Ф, осью абсцисс, правее точки B, и осью ординат, выше точки A.



Начертим прямую $0 = 480(5x + 6y)$ и начнём «двигать её вверх». Получится множество прямых $s = 480(5x + 6y)$, на рисунке для примера изображена одна из них: $y=-\frac{5}{6}x+5$. Будем двигать прямую вверх, пока она не пройдёт через одну из целочисленных точек из области Ф.

Впервые она пересечёт границу области в точке A в силу соотношения между угловыми коэффициентами: $-\frac{5}{6}<-\frac{3}{4}$. Если бы у этой точки были целые координаты, то мы получили бы ответ задачи. Однако у нее ордината не целая, поэтому потребуется дополнительное исследование.

Рисунок не очень подробный и не может быть обоснованием решения.

План решения будет таким: предъявим ответ — допустимую пару чисел (x, y), и докажем, что в ней значение $S(x, y)$ наименьшее. Рисунок нужен для того, чтобы отобрать точки — кандидаты на ответ.

Реализация решения. По рисунку находим точки с целочисленными координатами вблизи A: это точки $C_1(0;\ 13)$, $C_2(1;\ 12)$, $C_3(2;\ 11)$.

Точка $C_3(2;\ 11)$ лежит на границе AB, через эту точку проходит прямая $y=-\frac{5}{6}x+12\frac{2}{3}$. Для точек фигуры Ф с абсциссами больше 2 (то есть правее C_3) выполняется неравенство $y>-\frac{3}{4}x+12\frac{1}{2}$, а значит, и неравенство $y>-\frac{5}{6}x+12\frac{2}{3}$. Поэтому для минимизации $S(x, y)$ подходят только точки с абсциссой не больше 2. Ординаты тоже должны быть как можно меньше. Остается проверить точки $C_1(0;\ 13)$, $C_2(1;\ 12)$, $C_3(2;\ 11)$:

Точка	x	y	$S(x, y) = 480(5x + 6y)$
C_1	0	13	$480 \cdot 78$
C_2	1	12	$480 \cdot 77$
C_3	2	11	$480 \cdot 76$

Наименьшее значение $S(x, y) = 480 \cdot 76 = 36\,480$, оно достигается при $x = 2$, $y = 11$ и согласуется с прикидкой.

Построив модель и изучив ее, мы видим, что обоснование решения состоит из таких шагов: 1) отбросить точки с большими абсциссами; 2) проверить точки с маленькими абсциссами. Придумать такой план решения проще по рисунку, а записать решение может быть проще и без рисунка.

Решение 2. Авдею нет смысла покупать 4 или больше коробок с пряниками типа М. В четырех таких коробках помещается $4 \cdot 12 = 48$ пряников по 200 р. Их можно заменить на три коробки пряников типа Р: поместится столько же пряников — $4 \cdot 12 = 48$, а стоить они будут дешевле.

Возможно, Авдею стоит купить 0, 1, 2, или 3 коробки пряников типа М. Эти варианты можно перебрать и выбрать наилучший. Запишем анализ в таблице. Для всевозможных x определим y из условия $3x + 4y \geq 50$.

x	y	$S(x, y) = 480(5x + 6y)$
0	13	$480 \cdot 78$
1	12	$480 \cdot 77$
2	11	$480 \cdot 76$
3	11	$480 \cdot 81$

Наименьшее значение $480 \cdot 76 = 36480$.

Ответ. Авдею хватит 36480 р.

В следующем примере переменных три, но зато целевая функция очень простая.

Пример 30. Варфоломей купил на 134 000 р. 100 акций трех разных компаний: «Аз» по 1500 р., «Буки» по 1200 р. и «Веди» по 1250 р. за шт. Какое максимальное количество акций «Веди» мог купить Варфоломей?

Решение.

Обозначения. Для количества акций какой компании вводить обозначения — все равно. Введем обозначения для всех трех: Варфоломей купил x акций «Аз», y акций «Буки», z акций «Веди».

Построение модели. Всего акций $x + y + z = 100$, а все вместе они стоят $1500x + 1200y + 1250z = 134\,000$ р. Ограничения естественные: число акций натуральное. Раз написано, что куплены акции трех компаний, то все величины положительны. Требуется найти наибольшее возможное значение z — это и есть целевая функция. Запишем условие задачи в кратком виде:

$$\begin{cases} x+y+z=100, \quad 150x+120y+125z=13\,400; \\ x\in N, \quad y\in N, \quad z\in N, \\ z\to \text{наиб.}; \quad z - \ ? \end{cases}$$

Работа с моделью. Уменьшим число переменных, для этого из первого уравнения исключим x или y, главное — не z. Исключим x:

$$x = 100 - y - z.$$

Подставим это выражение во второе уравнение и упростим:

$$150(100 - y - z) + 120y + 125z = 13\,400;$$
$$15\,000 - 150y - 150z + 120y + 125z = 13\,400;$$
$$1600 = 30y + 25z;$$
$$320 = 6y + 5z.$$

Чтобы удобнее было искать наибольшее значение z, выразим эту переменную:

$$z = 64 - \frac{6}{5}y.$$

Чтобы значение z было наибольшим возможным целым, значение y должно быть наименьшим, кратным 5. Значит, $y = 5$, а тогда $z = 58$.

Ответ. 58.

Есть особенный тип задач, в которых мало сделать оптимальный выбор, но требуется из условия оптимальности сделать дальнейшие выводы.

3.4. Более сложные задачи

Пример 31. Зависимость объема Q (в штуках) купленного у фирмы товара от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q = 17\,000 - P$, причем $1000 \le P \le 17\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2000Q + 1\,250\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство.

Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на треть, однако прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Переменные заданы условием, сразу же перейдем к *построению модели.* В этой задаче явно задана целевая функция: это прибыль, и ее нужно максимизировать. Прибыль зависит от объема и цены, но из этих двух переменных можно оставить только одну, так как они между собой связаны простым соотношением $Q = 17\,000 - P$. Какую лучше оставить? Цену, потому что вопрос задачи — про цену. Выразим через P доход:

$$PQ = P(17\,000 - P),$$

а также затраты:

$$2000Q + 1\,250\,000 = 2000(17\,000 - P) + 1\,250\,000.$$

Теперь легко построить целевую функцию:

$$S(P) = P(17\,000 - P) - 2000(17\,000 - P) - 1\,250\,000 =$$
$$= (P - 2000)(17\,000 - P) - 1\,250\,000.$$

Ограничение на переменную P задано условием

$$1000 \le P \le 17\,000.$$

Нас интересует вопрос, при каких P значение функции наибольшее. Запишем модель в кратком виде:

$$\begin{cases} S(P) = (P - 2000)(17000 - P) - 1250000; \\ 1000 \le P \le 17000; \\ S(P) \to \text{наиб.};\ P - ? \end{cases}$$

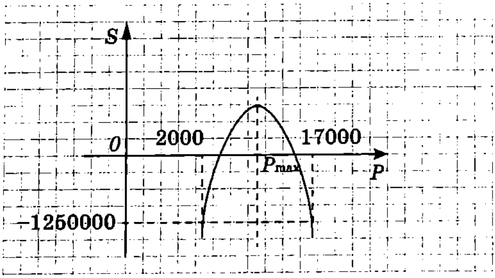
Работа с моделью. $S(P)$ — квадратичная функция, причем старший коэффициент отрицательный; график этой функции — парабола с ветвями вниз. Максимум достигается в вершине параболы; достаточно найти абсциссу P_{max} вершины и убедиться, что она удовлетворяет двойному неравенству (если не удовлетворяет, придется думать, что делать дальше).

Ищем P_{max} из геометрических соображений.

Очевидно, что в точках, в которых одна из скобок обращается в 0, значения функции равны:

$$S(17\,000) = S(2000) = -1\,250\,000;$$

значит, точки параболы с абсциссами 17 000 и 2000 симметричны относительно оси симметрии параболы.



Поэтому $P_{max}=\dfrac{2000+17\,000}{2}=\dfrac{19\,000}{2}$; это значение удовлетворяет ограничению $1000 \le P \le 17\,000$.

С оптимальным выбором мы разобрались, но нужно еще ответить на вопрос задачи. Известно, что если некоторую цену P_0 понизить на треть (станет $\frac{2}{3}P_0$), то прибыль не изменится: $S(P_0)=S(\frac{2}{3}P_0)$. Решим это уравнение и найдем P_0:

$$(P_0-2000)(17\,000-P_0)-1\,250\,000=$$
$$=\left(\frac{2}{3}P_0-2000\right)\left(17\,000-\frac{2}{3}P_0\right)-1\,250\,000;$$

$$(P_0-2000)(17\,000-P_0)=\left(\frac{2}{3}P_0-2000\right)\left(17\,000-\frac{2}{3}P_0\right).$$

$$17\,000P_0-2000\cdot 17\,000-P_0^2+2000P_0=$$
$$=17\,000\cdot\frac{2}{3}P_0-2000\cdot 17\,000-\frac{4}{9}P_0^2+2000\cdot\frac{2}{3}P_0;$$

$$19\,000P_0-P_0^2=19\,000\cdot\frac{2}{3}P_0-\frac{4}{9}P_0^2.$$

Цена — величина положительная, поэтому можно обе части уравнения делить на P_0:

$$19\,000-P_0=19\,000\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{9}P_0;$$

$$19\,000\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}P_0;$$

$$P_0=19\,000\cdot\frac{3}{5}.$$

Спрашивается, на сколько процентов нужно увеличить $\frac{2}{3}P_0$, чтобы получить P_{max}. Мы знаем, что удобнее искать, во сколько раз больше, а не на сколько процентов. Найдем во сколько раз, обозначив эту величину q:

$$\frac{2}{3}P_0 \cdot q = P_{max};$$

$$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{19\,000} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot q = \frac{\cancel{19\,000}}{2};$$

$$q = \frac{5}{4}.$$

Пониженную цену нужно увеличить в 1,25 раз или на 25%.

Ответ. 25%.

В следующем примере два этапа оптимизации: требуется найти минимальное значение параметра, при котором максимум целевой функции удовлетворяет некоторому условию.

Пример 32. Затраты на изготовление x тыс. пряников в месяц составляют $(0{,}5x^2 + 10x + 48)$ тыс. р. При цене p рублей за штуку прибыль от продажи x тыс. пряников равна $px - (0{,}5x^2 + 10x + 48)$ тыс. р. Корней с Пантелеем могут изготавливать и продавать столько пряников, чтобы обеспечить наибольшую месячную прибыль. При каком наименьшем значении p она составит не менее 50 тыс. р.?

Решение.

Построение модели. Целевая функция задана по условию:

$S(x) = px - (0{,}5x^2 + 10x + 48) = -0{,}5x^2 + (p - 10)x - 48.$

Ограничений или связей на переменную в условии явно нет, но здравый смысл подсказывает, что цена положительна: $p > 0$. График функции — парабола с ветвями, направленными вниз. Наибольшее значение функция принимает

в точке с координатой $x_в = -\dfrac{p-10}{2\cdot(-0{,}5)} = p - 10.$

Наибольшая прибыль составляет $S(x_в) = \dfrac{(p-10)^2}{2} - 48$.

Она должна быть не меньше 50 тыс. р. Составим неравенство: $\dfrac{(p-10)^2}{2} - 48 \ge 50.$

Работа с моделью. Решаем неравенство:

$$(p-10)^2 \ge 196;$$

$$(p-10)^2-14^2 \ge 0;$$
$$(p-24)(p+4) \ge 0.$$

Цена отрицательной быть не может, поэтому $p-24 \ge 0$ или $p \ge 24$. Наименьшая возможная цена — 24 р.

Проверка. Если прикидку сделать не получилось, надо сделать проверку по условию задачи. Попробуем рассказать всю историю заново, включив в нее все найденные значения. Оптимальное количество пряников — $x_в = p - 10 = 14$ тыс.; на их производство затратили 286 тыс. р., а выручили за них $px_в = 24 \cdot 14 = 336$ тыс. р. Месячная прибыль получается $336 - 286 = 50$ тыс. р.

Ответ. 24.▲

Следующая задача в каком-то смысле обратна задаче оптимального выбора. Известно, в какой точке целевая функция принимает экстремальное значение, а уж из этого условия нужно найти значение параметра.

Пример 33. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $24+\frac{n^2}{4}$ тыс. р. в конце года с номером n ($n = 1; 2;\ldots$). Начиная с десятого, в конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке под целое число p процентов годовых. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги надо продать в конце четырнадцатого года. Сколько процентов в год начисляет банк по вкладу?

Решение.

Обозначения. Введем процентный коэффициент $q=1+\frac{p}{100}$; по условию $100(q-1)$ — натуральное число. Обозначим k номер года, в который продают ценные бумаги. По условию $10 \le k \le 19$.

Построение модели. Введем целевую функцию $S(k)$ — сумму на счёте в банке в конце 20-го года, если ценные бумаги продали в год k. По условию дано, что эта функция принимает наибольшее значение при $k = 14$.

К концу k-го года ценные бумаги стоят $24+\frac{k^2}{4}$ тыс. р., эту сумму положат в банк после их продажи.

Через год на счете в банке будет $\left(24+\frac{k^2}{4}\right)q$ тыс. р.;

через два года — $\left(24+\frac{k^2}{4}\right)q^2$ тыс. р.;

к концу 20-года — $S(k)=\left(24+\frac{k^2}{4}\right)q^{20-k}$ тыс. р.

Известно, что наибольшее значение функция $S(k)$ принимает при $k = 14$. Требуется найти значение q при условии, что $100q$ — целое число.

$$\begin{cases} S(k)=\left(24+\frac{k^2}{4}\right)q^{20-k}; \\ S(14)>S(k) \quad k=10, 11, 12, 13, 15, \ldots 19; \\ k\in N, 100(q-1)\in N, q-? \end{cases}$$

Работа с моделью. При разных k мы получаем разные неравенства, решать их все не хочется — очень уж муторно. Поэтому учтем только неравенство для $k = 13$ и $k = 15$, найдем значение q, а потом проверим неравенства для остальных значений k:

$$\begin{cases} S(14)>S(13); \\ S(14)>S(15); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(24+\frac{14^2}{4}\right)q^6>\left(24+\frac{13^2}{4}\right)q^7; \\ \left(24+\frac{14^2}{4}\right)q^6>\left(24+\frac{15^2}{4}\right)q^5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(24+\frac{14^2}{4}\right)>\left(24+\frac{13^2}{4}\right)q; \\ \left(24+\frac{14^2}{4}\right)q>\left(24+\frac{15^2}{4}\right); \end{cases}$$

$\boxed{\frac{A}{B}\cdot B}$

$$\frac{24+\frac{15^2}{4}}{24+\frac{14^2}{4}}<q<\frac{24+\frac{14^2}{4}}{24+\frac{13^2}{4}};$$

$$\frac{96+15^2}{96+14^2}<q<\frac{96+14^2}{96+13^2};$$

$\boxed{A\cdot B}$

$$\frac{15^2-14^2}{96+14^2}<q-1<\frac{14^2-13^2}{96+13^2};$$

$$\frac{29}{292}<q-1<\frac{27}{265};$$

$$\frac{2900}{292}<100(q-1)<\frac{2700}{265};$$

$$9{,}9<100\,(q-1)<10{,}2.$$

По условию $100\,(q-1)$ — натуральное число, а значит, $100\,(q-1)=10$; $q=1{,}1$. Проверим, что при $q=1{,}1$ выполняются неравенства $S(k)>S(k+1)$ для всех $k=15,\ldots,19$:

$$\frac{24+\frac{(k+1)^2}{4}}{24+\frac{k^2}{4}}<1{,}1;$$

$$\frac{96+k^2+2k+1}{96+k^2}<1{,}1;$$

$$\frac{2k+1}{96+k^2}<0{,}1.$$

Знаменатель положителен при всех значениях переменной, поэтому можно на него умножить обе части неравенства:

$$2k+1<9{,}6+0{,}1k^2;$$
$$k^2-20k+86>0;$$
$$(k-10)^2>14.$$

Неравенство выполняется для всех натуральных k таких, что $k>10+\sqrt{14}$ или $k<10-\sqrt{14}$; в частности, для $k=14,\ldots,19$.

Аналогично проверим, что при $q=1{,}1$ выполняются неравенства $S(k-1)<S(k)$ для всех $k=11,\ldots,14$:

$$\frac{24+\frac{(k-1)^2}{4}}{24+\frac{k^2}{4}}<\frac{1}{1,1};$$

$$\frac{96+k^2-2k+1}{96+k^2}<\frac{1}{1,1};$$

$$\frac{-2k+1}{96+k^2}<\frac{-0,1}{1,1};$$

$$\frac{-2k+1}{96+k^2}<-\frac{1}{11};$$

Знаменатель положителен при всех значениях переменной, поэтому можно на него умножить обе части неравенства:

$$-22k+11<-k^2-96;$$

$$k^2-22k+107<0;$$

$$(k-11)^2<14.$$

Неравенство выполняется для всех натуральных k таких, что

$$11-\sqrt{14}<k<11+\sqrt{14};$$

в частности, для $k = 11,...,14$.

Зная $q = 1,1$, вычислим банковский процент:

$$p = 100(q-1) = 10.$$

Ответ. 10.

3.5. Задачи на оптимальный выбор

Задача 36. а) Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. р. в конце года t ($t = 1, 2,...$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на целое число процентов p. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого бумаги нужно продавать строго в конце девятнадцатого года. Найти p.

б) Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. р. в конце года t ($t = 1, 2,...$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться на целое число процентов p. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. Найти p.

Задача 37. а) Пантелей собирался сделать вклад сроком на 4 года и выбирал между вкладом А и вкладом Б. По вкладу А банк каждый год увеличивает на 15% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года. По вкладу Б банк первые два года увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 14%, а в конце третьего и четвертого годов — на некоторое натуральное число процентов p. Оказалось, что вклад Б для Пантелея выгодней. Найдите наименьшее возможное значение p.

б) Корней собирался сделать вклад сроком на 4 года и выбирал между вкладом А и вкладом Б. По вкладу А банк каждый год увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года. По вкладу Б банк первые два года увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 8%, а в конце третьего и четвертого годов — на некоторое натуральное число процентов p. Оказалось, что вклад Б для Корнея выгодней. Найдите наименьшее возможное значение p.

Задача 38. а) В первые классы поступает 47 человек: 22 мальчика и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в 1А попали 24 человека, а в 1Б — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

б) В первые классы поступает 49 человек: 22 мальчика и 27 девочек. Их распределили по двум классам: в 1А попали 24 человека, а в 1Б — 25. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наименьшей?

Задача 39. а) У Пантелея есть два поля, каждое площадью 5 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 350 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Пантелей может продавать картофель по цене 1000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1100 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить Пантелей?

б) У Корнея есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 350 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 320 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Корней может продавать картофель по цене 1000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1100 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить Корней?

Задача 40. а) Пряничный цех выпускает пряники с шоколадной и клубничной начинкой. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности цеха по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Начинка	Себестоимость (за тонну)	Отпускная цена (за тонну)	Производственные возможности
Шоколадная	70 тыс. р.	100 тыс. р.	120 т (в месяц)
Клубничная	90 тыс. р.	135 тыс. р.	75 т (в месяц)

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция цеха находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить цех от производства пряников за 1 месяц (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

б) Пряничный цех выпускает пряники с шоколадной и клубничной начинкой. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности цеха по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Начинка	Себестоимость (за тонну)	Отпускная цена (за тонну)	Производственные возможности
Шоколадная	60 тыс. р.	90 тыс. р.	100 т (в месяц)
Клубничная	80 тыс. р.	125 тыс. р.	75 т (в месяц)

Для выполнения условий ассортимента, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 20 тонн. Предполагая, что вся продукция цеха находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить цех от производства пряников за 1 месяц (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

Задача 41. а) Два автомобиля равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 60 км/ч и находится на расстоянии 30 км от перекрестка, второй движется со скоростью 90 км/ч и находится на расстоянии 110 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между автомобилями станет наименьшим?

б) Два автомобиля равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 60 км/ч и находится на расстоянии 55 км от перекрестка, второй движется со скоростью 75 км/ч и находится на расстоянии 38 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между автомобилями станет наименьшим?

Задача 42. а) Бригаду в 28 человек нужно распределить для работы в двух цехах. Если в первом цехе работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ д. е. Если во втором цехе работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ д. е. Как нужно распределить рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими?

б) Бригаду в 82 человека нужно распределить для работы в двух цехах. Если в первом цехе работает t человек, то их суточная зарплата составляет $21t^2$ д. е. Если во втором цехе работает t человек, то их суточная зарплата составляет $20t^2$ д. е. Как нужно распределить рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими?

Задача 43. а) Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото и алмазы. У Али-Бабы с собой оказался невесомый мешок. Известно, что полный мешок золота весит 200 кг, а полный мешок алмазов — 50 кг. Килограмм золота стоит 20 д. е., а килограмм алмазов — 50 д. е. Какую наибольшую сумму денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести с собой не более 80 кг?

б) Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото и алмазы. У Али-Бабы с собой оказался невесомый мешок. Известно, что полный мешок золота весит 200 кг, а полный мешок алмазов — 50 кг. Килограмм золота стоит 5 д. е., а килограмм алмазов — 7 д. е. Какую наибольшую сумму денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести с собой не более 80 кг?

Задача 44. а) Мама дала Пантелею 1000 р. на покупку тетрадей. Тетрадь в клетку стоит 30 р., а в линейку — 20 р. Число тетрадей в клетку может отличаться от числа тетрадей в линейку не более, чем на 10. Какое наибольшее число тетрадей может купить Пантелей?

б) Мама дала Корнею 1000 р. на покупку тетрадей. Тетрадь в клетку стоит 40 р., а в линейку — 30 р. Число тетрадей в клетку может отличаться от числа тетрадей в линейку не более чем на 10. Какое наибольшее число тетрадей может купить Корней?

Задача 45. а) Пантелей купил тетради трех видов: в клетку, в линейку и в треугольник. Цена тетрадей в клетку и в линейку одинакова и выражается целым числом рублей, тетради в треугольник продаются по 50 р. за шт. Тетрадей в клетку Пантелей купил 12 штук, в линейку — на 150 р., а в треугольник — столько же, сколько тетрадей в линейку. Какова наименьшая сумма, которую Пантелей мог заплатить за тетради?

б) Корней купил тетради трех видов: в клетку, в линейку и в треугольник. Цена тетрадей в клетку и в линейку одинакова и выражается целым числом рублей, тетради в треугольник продаются по 35 р. за шт. Тетрадей в клетку Корней купил 12 штук, в линейку — на 420 р., а в треугольник — столько же, сколько тетрадей в линейку. Какова наименьшая сумма, которую Корней мог заплатить за тетради?

Задача 46. а) На 4000 р. Пантелей купил 100 тетрадей разных видов: в клетку по 32 р., в линейку по 40 р. и в треугольник по 50 р. за штуку. Какое максимальное количество тетрадей в треугольник он мог купить?

б) На 4000 р. Корней купил 100 тетрадей разных видов: в клетку по 32 р., в линейку по 45 р. и в треугольник по 60 р. за штуку. Какое максимальное количество тетрадей в треугольник он мог купить?

Задача 47. а) Предприниматель собирается открыть отель. В отеле могут быть одноместные номера площадью

24 м^2 и двухместные номера площадью 40 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1040 м^2. Инфраструктура отеля позволяет разместить одновременно не более 50 гостей. Одноместный номер будет приносить отелю 1400 р. в сутки, а двухместный номер — 2400 р. в сутки. Предприниматель может поделить площадь между одноместными и двухместными номерами как хочет. Какую наибольшую сумму (в рублях) он сможет заработать в сутки на своём отеле?

б) Предприниматель собирается открыть отель. В отеле могут быть одноместные номера площадью 25 м^2 и двухместные номера площадью 40 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 900 м^2. Инфраструктура отеля позволяет разместить одновременно не более 40 гостей. Одноместный номер будет приносить отелю 1400 р. в сутки, а двухместный номер — 2400 р. в сутки. Предприниматель может поделить площадь между одноместными и двухместными номерами как хочет. Какую наибольшую сумму (в рублях) он сможет заработать в сутки на своём отеле?

Задача 48. а) Матвей вышел из дома на прогулку со скоростью v км/ч. После того, как он прошел 5 км, из дома вслед за ним выехал на велосипеде Пантелей, его скорость на 10 км/ч больше скорости Матвея. Пантелей догнал Матвея, они повернули назад и вместе возвратились домой пешком со скоростью 3,6 км/ч. При каком значении v время прогулки Матвея будет наименьшим?

б) Корней вышел из дома на прогулку со скоростью v км/ч. После того, как он прошел 4 км, из дома вслед за ним выехал на велосипеде Еремей, его скорость на 8 км/ч больше скорости Корнея. Еремей догнал Корнея, они повернули назад и вместе возвратились домой пешком со скоростью 4,5 км/ч. При каком значении v время прогулки Корнея будет наименьшим?

Задача 49. а) Баржа грузоподъемностью 140 тонн перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 20% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость контейнеров обоих типов указаны в таблице.

Тип контейнера	Вес, т	Стоимость, млн р.
А	2	3
В	3	4

Чему равна наибольшая возможная стоимость контейнеров, которые может перевезти баржа?

б) Баржа грузоподъемностью 160 тонн перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 20% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость контейнеров обоих типов указаны в таблице.

Тип контейнера	Вес, т	Стоимость, млн р.
А	2	3
В	5	7

Чему равна наибольшая возможная стоимость контейнеров, которые может перевезти баржа?

Задача 50. а) На двух заводах в городах А и Б производятся абсолютно одинаковые приборы. Чтобы произвести t приборов за неделю, рабочие в городе А трудятся $t^2 + 8t$ часов, а в городе Б — $2t^2 + 4t$ часов. За каждый час работы рабочему платят 1 д. е. За неделю нужно произвести 40 приборов. Какую наименьшую сумму придется потратить на оплату труда рабочих в эту неделю?

б) На двух заводах в городах А и Б производятся абсолютно одинаковые приборы. Чтобы произвести t приборов за неделю, рабочие в городе А трудятся $t^2 + 6t$ часов, а в городе Б — $2t^2$ часов. За каждый час работы рабочему платят 1 д. е. За неделю нужно произвести 60 приборов. Какую наименьшую сумму придется потратить на оплату труда рабочих в эту неделю?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. 15 февраля Пантелей взял в банке кредит сроком на полгода. Условия его возврата таковы:

- в конце каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- 1 числа каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15 числа каждого месяца остаток долга должен составлять определенную часть от суммы кредита, указанную в следующей таблице:

Месяц	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август
Долг	100%	90%	75%	60%	40%	20%	0%

На сколько процентов общая сумма выплат превысит сумму самого кредита?

2. Пантелей собирается взять в кредит 200 000 р. под 12% годовых. Ежегодные выплаты все равны, кроме, быть может, самой последней. На какое минимальное количество лет Пантелей может взять кредит, чтобы выплаты не превосходили 75 000 р.?

3. Строительство нового завода стоит 75 млн р. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}25x^2 + 4x + 11$ млн р. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. р. за единицу, то прибыль, приносимая заводом за один год, составит $px - (0{,}25x^2 + 4x + 11)$ млн р. Когда завод будет построен, он будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

4. Предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется два часа работы станка А и четыре часа работы станка Б, а для изготовления изделия второго типа требуется три часа работы станка А и один час работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 150 часов в месяц, а станок Б — не более 120 часов в месяц. Каждое изделие любого типа приносит предприятию 1000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий каждого типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Вариант 2.

1. 15 февраля Корней взял в банке кредит сроком на полгода. Условия его возврата таковы:

• в конце каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

• 1 числа каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

• 15 числа каждого месяца остаток долга должен составлять определенную часть от суммы кредита, указанную в следующей таблице:

Месяц	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август
Долг	100%	85%	70%	55%	40%	20%	0%

На сколько процентов общая сумма выплат превысит сумму самого кредита?

2. Корней собирается взять в кредит 150 000 р. под 14% годовых. Ежегодные выплаты все равны, кроме, быть может, самой последней. На какое минимальное количество лет Пантелей может взять кредит, чтобы выплаты не превосходили 65 000 р.?

3. Строительство нового завода стоит 80 млн р. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 4x + 12$ млн р. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. р. за единицу, то прибыль, приносимая заводом за один год, составит $px - (0{,}5x^2 + 4x + 12)$ млн. р. Когда завод будет построен, он будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

4. Предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется два часа работы станка А и шесть часов работы станка Б, а для изготовления изделия второго типа требуется семь часов работы станка А и три часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 100 часов в месяц, а станок Б — не более 120 часов в месяц. Каждое изделие любого типа приносит предприятию 1000 д. е. прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия и определите, сколько изделий каждого типа следует выпускать для получения этой прибыли.

ПОЧЕМУ РАБОТАЕТ ВЫЧЕРКИВАНИЕ ДЕВЯТОК

На экзамене нельзя пользоваться калькулятором, а в задачах с экономическим содержанием часто приходится много считать, иногда с многозначными числами. Обязательно нужно проверять вычисления, для этого пригодится прием «вычеркивание девяток».

В основе этого приема проверки лежит арифметика остатков. Проще всего смотреть на остатки от деления на 2: любое число при делении на 2 может давать в остатке 0 или 1. Если 0, то число чётное, если 1 — нечётное.

Хорошо известно, что сумма двух чётных чисел или двух нечётных должна быть чётным числом; то же для разности. Этим свойством можно пользоваться для проверки вычислений: если ты сложил два нечётных числа и сумма получилась нечётной, то где-то ты ошибся. Достоинство такой проверки — простота, ошибиться в определении чётности практически невозможно.

Задание. Найди заведомо ошибочные вычисления, обращая внимание на чётность:

1) $2345 + 9876 = 12\,222$;

2) $2345 \cdot 321 = 752\,745$;

3) $9863 - 485 = 9379$.

Недостаток проверки чётностью в том, что проверяется только последняя цифра, ведь все остальные на чётность числа не влияют.

Сейчас мы посмотрим формально на этот метод, чтобы его улучшить.

Обозначим x_2 остаток от деления числа x на 2. Например: $2345_2 = 1$; $9377_2 = 1$. Сумма этих остатков равна $1 + 1$, то есть 2, а такого остатка при делении на 2 не бывает. Поэтому нельзя сказать, что остаток суммы равен сумме остатков; на самом деле мы проверяем нечто иное. Мы складываем остатки: $1 + 1 = 2$; ещё раз берём остаток: $2_2 = 0$ (два делится на два без остатка); а затем уж проверяем, равен ли он остатку суммы $(2345 + 9377)_2 = 11\,722_2$.

Формально проверка чётностью означает проверку таких вот равенств:

$$(x_2 + y_2)_2 = (x + y)_2;$$
$$(x_2 - y_2)_2 = (x - y)_2;$$
$$(x_2 \cdot y_2)_2 = (x \cdot y)_2.$$

Эти сложные формулы нам сейчас пригодятся, поэтому «поиграй» с ними: подставь вместо x и y какие-нибудь числа, можно из предыдущей задачи, можно другие, и посмотри, что получится. Никогда не пропускай этап «поиграть» с формулой. Для сильных духом: попробуй доказать все три формулы или хотя бы одну, это совсем несложно.

Чтобы приём не сводился к проверке только последней цифры, вместо двойки можно выбрать любое другое число, но сделать это надо с умом. Важно не потерять достоинство — проверка должна оставаться несложной. Поэтому несчастливое число 13, например, лучше не брать, и вовсе не из суеверия. Дело в том, что остатки на 13 вычислять неудобно, долго и ошибкоопасно.

Оказывается, хорошо взять 9. Остаток от деления числа на 9 найти легко, он равен остатку от деления суммы цифр числа. В упрощённом виде с этим свойством сталкиваются все пятиклассники, когда запоминают признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Признак означает, что остаток от деления числа на 9 равен 0 тогда и только тогда, когда остаток от деления суммы его цифр на 9 равен 0. Почему-то от школьников скрывают, что это верно не только для нулевого остатка.

«Поиграем» с этим свойством. Возьмём для примера число 4277 и запишем его разложение по степеням 10:

$$4277 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 7.$$

Чтобы найти его остаток от деления на 9, выделим слагаемые, которые наверняка делятся на 9, и избавимся от них:

$$4277_9 = (4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 7)_9 =$$
$$= (4 \cdot (999 + 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 7 \cdot (9 + 1) + 7)_9 =$$
$$= (4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 7 \cdot 9)_9 + (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 7)_9 =$$
$$= (4 + 2 + 7 + 7)_9.$$

Чтобы найти остаток от деления 4277 на 9, достаточно найти остаток от деления суммы его цифр $4 + 2 + 7 + 7$. Но можно и сумму цифр не искать, а пойти дальше по пути упрощения. Можно вычеркивать цифры, которые в сумме дают 9:

$$(4 + 2 + 7 + 7)_9 = (4 + \cancel{2} + \cancel{7} + 7)_9 = (4 + 7)_9 = 2.$$

Если нет пары цифр, которые в сумме дают 9, можно работать с другими парами: вычеркивать пару цифр и на их место записывать остаток от деления их суммы на 9. Вот как ищут остаток от деления числа 215863894З715 на 9:

В предпоследней строчке вычеркнули две пятёрки и вместо них записали 1 (в кружочке).

Научившись находить остаток от деления на 9, проверяют вычисления по таким формулам:

$(x_9 + y_9)_9 = (x + y)_9$;

$(x_9 - y_9)_9 = (x - y)_9$;

$(x_9 \cdot y_9)_9 = (x \cdot y)_9$.

Посмотри видеоролик с примерами проверки по принципу вычеркивания девяток: https://youtube.cxG0D2d45QQ.

ОТВЕТЫ

1. а) 2 и 3. б) 3 и 4. **2.** а) 1) $0{,}85a$; 2) $1{,}16a$; 3) $\frac{100a}{83}$; 4) $\frac{100a}{118}$. б) 1) $1{,}23a$; 2) $0{,}76a$; 3) $\frac{100a}{126}$; 4) $\frac{100a}{73}$. **3.** а) 2754 р. б) 3672 р. **4.** а) 700 р. б) 800 р. **5.** а) 430 р. б) 640 р. **6.** а) 9. б) 7. **7.** а), б) На 10. **8.** а) На 5%. б) На 15%. **9.** а) На 12%. б) На 8%. **10.** а) 25%. б) 30%. **11.** а) 22 000 р. б) 25 000 р. **12.** а) 1) l_2; 2) l_1; 3) l_3. б) 1) l_3; 2) l_1; 3) l_2. **13.** а) 1) l_1; 2) l_2; 3) l_3. б) 1) l_2; 2) l_1; 3) l_3. **14.** а) 1) l_3; 2) l_1; 3) l_2. б) 1) l_1; 2) l_2; 3) l_3. **15.** а) 1) l_2; 2) l_1; $R = 10$; б) 1) l_1; 2) l_2; $R = 34$. **16.** а) Выгоднее купить нужные книги без скидки. б) Выгоднее купить ненужную книгу за 225 р. **17.** а) Через 8 лет. б) Через 6 лет. **18.** а) Под 14% годовых. б) Под 13% годовых. **19.** а) 3. б) 2. **20.** а) 2. б) 3. **21.** а) На 575 000 р. б) На 662 500 р. **22.** а) 2. б) 1,5. **23.** а) 8. б) 10. **24.** а) У Пантелея. б) У Корнея. **25.** а) 59 000 р. б) 97 000. **26.** а) На 4. б) На 6. **27.** а) 14 000 р. б) 24 000 р. **28.** а) 74 млн р. б) 46 млн р. **29.** а) 5100. б) 2750. **30.** а), б) На 5. **31.** а) На 136 350 р. б) На 7320 р. **32.** а) 10. б) 15. **33.** а) 20. б) 25. **34.** а) За 12,5 лет. а) За 8 лет. **35.** а) 13. б) 14. **36.** а) 11. б) 10. **37.** а) 17. б) 13. **38.** а) В 1А — 2 девочки и 22 мальчика, в 1Б — 23 девочки. б) В 1А — 2 девочки и 22 мальчика, в 1Б — 25 девочек. **39.** а) 4 200 000 р. б) 8 400 000 р. **40.** а) 3555 тыс. р. б) 3300 тыс. р. **41.** а) Через 60. б) Через 40. **42.** а) 12 человек в первый цех и 16 человек во второй цех. б) 40 человек в первый цех и 42 человека во второй цех. **43.** а) 2800 д. е. б) 480 д. е. **44.** а) 42. б) 30. **45.** а) 750 р. б) 1260 р. **46.** а) 44. б) 23. **47.** а) 62 000. б) 52 000. **48.** а), б) 6 км/ч. **49.** а) 195 млн р. б) 228 млн р. **50.** а) 1332 д. е. б) 2637 д. е.

Контрольная работа.

Вариант 1. 1. 7,7. **2.** На 4. **3.** 10. **4.** 57 000 д. е.; 21 изд. первого типа; 36 изд. второго типа.

Вариант 2. 1. 7,4. **2.** На 3. **3.** 12. **4.** 25 000 д. е., 15 изд. первого типа; 10 изд. второго типа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для детей старше шести лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. №436-ФЗ

Учебное издание

Шихова Надежда Анатольевна

Задачи с экономическим содержанием

Подписано в печать 09.06.2021. Формат 60×88/16.
Усл. печ. л. 5,87. Тираж 2000 экз. Заказ1622.

ООО «Илекса»
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real-ilexa@yandex.ru,
телефон: +7 (964) 534-80-01

Отпечатано в ООО "Типография "Миттель Пресс".
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Шихова Н.А.
Задачи по теории вероятностей

Пособие знакомит читателя с типовыми моделями, которые встречаются в задачах из школьных учебников и из открытого банка заданий ЕГЭ. Пособие также учит строить модель задачи по ее условию. Материал изложен наглядно, с использованием схем, рисунков и таблиц.

В пособии много примеров и заданий для самостоятельной работы. К примерам и заданиям даны подробные решения, причем зачастую объясняется не только, как получить ответ, но и каким образом можно догадаться, как найти решение. Сложность примеров примерно соответствует сложности заданий из открытого банка ЕГЭ по математике.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, студентов педагогических вузов.

Куланин Е.Д., Шихова Н.А.

Геометрический фейерверк. Творческие задания на уроках математики.

В книге рассматриваются красивые геометрические факты, связанные с окружностью Эйлера, теоремой и точками Фейербаха, а также другие материалы, способствующие развитию творческих способностей школьников. Пособие предназначено в первую очередь школьникам старших классов, учителям и студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной геометрии.

Джащитов А.Э., Бредихин Д.А.

Знать, уметь, размышлять. Подготовка к аттестации по математике. 9–11 классы.

В учебном пособии изложены материалы основных разделов математики средней школы. Каждый из 12-ти разделов состоит из 4-х частей: проверка знаний; умения – методы решений задач и замечания; размышления – разминка; ответы на задачи из разминки. Приведены формулы, необходимые для решения задач.

Куланин Е.Д., Шихова Н.А.

Исследовательские задания по геометрии. 8–10 классы.

Пособие содержит методически выстроенный ряд исследовательских задач, необходимый и достаточный для совершения учащимися первых самостоятельных шагов в области построения геометрических доказательств. Решая исследовательские задачи, ученик сам ставит вопросы и ищет ответы на них, выдвигает гипотезы, доказывает или опровергает их. При этом всякий полученный ответ может становиться основанием для постановки новых вопросов.

Пособие написано живым, занимательным языком, понятным и доступным современному школьнику. Оно может быть использовано как для занятий в классе, так и для самостоятельной работы учащихся.

Пособие предназначено учащимся для подготовки к ЕГЭ и математическим олимпиадам различного уровня, учителям, неравнодушным к своему делу, а также студентам педагогических вузов, готовящимся к работе по профессии.

Двухуровневый **УМК** по Алгебре и началам математического анализа дает возможность освоить курс математики как на минимально необходимом для сдачи ЕГЭ уровне, так и на уровне, позволяющем получить максимальные баллы и поступить в престижный вуз.

Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.
3000 конкурсных задач по математике.
Алгебра и начала анализа

Сборник задач представляет собой алгебраическую часть известного задачника «3000 конкурсных задач по математике», выдержавшего 12 изданий и несколько допечаток.

Книга может быть использована в качестве пособия для подготовительных курсов, при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике и ЕГЭ, а также для занятий с репетитором. С другой стороны, большое количество разнообразных задач, распределенных по типам и уровням сложности, позволит учителям использовать данный задачник на уроках математики и в работе математических кружков.

Куланин Е.Д.
3000 конкурсных задач по математике. Геометрия

Сборник задач представляет собой геометрическую часть известного задачника «3000 конкурсных задач по математике», выдержавшего 12 изданий и несколько допечаток.

Книга может быть использована в качестве пособия для подготовительных курсов, при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике и ЕГЭ, а также для занятий с репетитором. С другой стороны, большое количество разнообразных задач, распределенных по типам и уровням сложности, позволит учителям использовать данный задачник на уроках математики и в работе математических кружков.

Хлевнюк Н.Н., Иванова М.В., Иващенко В.Г., Мелкова Н.С.

Формирование вычислительных навыков на уроках математики. 5–9 классы

Данное пособие создано на основе опыта работы в общеобразовательной школе, представляет собой методику формирования вычислительных навыков и развития математических способностей в 5–9-х классах; не имеет аналогов в методической литературе. В пособии представлен полный пакет контролирующих уровневых тестов для проверки умений и навыков оперирования числами и выражениями на основе определений, правил и свойств; включает контроль, диагностику, тренинг и материалы для коррекции. Содержание тестов полностью соответствует государственному стандарту математического образования.

Данное издание книги дополнено пакетом контролирующих тестов для 5-6-х классов по программе С.М. Никольского.

Пособие позволит учителям организовать системную работу с учащимися по формированию базовых математических знаний, начиная с 5-го класса; поможет администрации для проведения срезов по выявлению уровня сформированности системы качеств знаний учащихся и качества преподавания. Большую помощь пособие окажет школьникам, желающим повысить эффективность в изучении математики, и родителям, следящим за развитием своих детей.

Хлевнюк Н.Н.
Иванова М.В.

Формирование вычислительных навыков на уроках математики. 10–11 классы

Пособие создано на основе опыта работы в общеобразовательной школе в классах с разным уровнем математической подготовки учащихся. В нем изложена методика формирования вычислительных навыков и развития математических способностей учащихся 10–11 классов. Пособие не имеет аналогов в методической литературе. Оно содержит пакет обучающих и контролирующих уровневых заданий для проверки умений и навыков оперирования числами, выражениями, уравнениями, неравенствами и функциями всех типов, включает контроль, диагностику, тренинг. Содержание тестов полностью соответствует государственному стандарту математического образования. Данное пособие является логичным продолжением книги «Формирование вычислительных навыков... 5–9 классы»; оно поможет учителям организовать эффективную работу по формированию математических знаний учащихся 10–11 классов в соответствии с разными программами обучения и ликвидировать имеющиеся у учащихся пробелы.

Ситкин Е.Л.

Экспресс-обучение решению задач по стереометрии: 10–11 классы

Предлагаемое пособие представляет собой практикум по решению задач на построение сечений и вычисление площадей сечений, на вычисление расстояний и углов в пространстве с помощью специально разработанной методики, использующей векторы и координаты. Пособие, несомненно, вызовет интерес у учащихся старших классов и их учителей, так как помогает быстро научить решать задачи сложного уровня ЕГЭ и внутренних олимпиад ведущих вузов. В издании приведено решение большого количества задач, иллюстрирующих данную методику, и представлен набор задач для проведения самостоятельных и контрольных работ.

Шевкин А.В.

Текстовые задачи по математике: 5–6

Сборник включает текстовые задачи по разделам школьной математики: натуральные числа, дроби, пропорции, проценты, уравнения. Ко многим задачам даны ответы и советы – с чего начинать решение. В приложении даны краткие методические советы и справочные таблицы. Материалы сборника можно использовать как дополнение к любому действующему учебнику.

Пособие предназначено для учащихся 5–6 классов общеобразовательной школы, учителей математики, студентов педагогических вузов.

Шевкин А.В.

Текстовые задачи по математике: 7–11 классы

Эта книга – дополнительное учебное пособие по алгебре для учащихся 7–11 классов. Интересный задачный материал дает новую жизнь старой, незаслуженно забытой идее обобщения решений арифметических задач – связующему мостику между арифметикой и алгеброй. В книге рассмотрены задачи, начиная от простых и заканчивая конкурсными задачами прошлых лет.

Пособие может быть использовано на уроках алгебры, для подготовки к итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ), а также для самостоятельной работы учащихся.

Шевкин А.В.

Текстовые задачи в школьном курсе математики. 5–11 классы

Многие годы обучение решению текстовых задач по математике в советской, а затем и в российской школе, базировалось на использовании уравнений с 5-го класса, что негативно сказывалось на развитии мышления и речи школьников. Стандарт (ФГОС) и Программа обучения математике (2015–2016 гг.) формулируют новую цель: научить школьников решению текстовых задач арифметическими способами.

В данном пособии изложены основные подходы к обучению учащихся решению различных задач преимущественно арифметическим способом, выделены ключевые темы и типы задач школьного курса математики, приведены примеры решения задач разными способами, предложены задачи для самостоятельного решения. Содержание пособия охватывает широкий круг вопросов: от обзора применения текстовых задач в прошлые эпохи в России и за рубежом, до практики использования задач в современной школе (основной и старшей); включает задачи итоговых испытаний ОГЭ и ЕГЭ.

Пособие адресовано учащимся основной и старшей школы, желающим научиться решать задачи и успешно сдать ОГЭ и ЕГЭ, учителям математики, студентам педагогических вузов, а также родителям школьников.

Генденштейн Л.Э.
Кирик Л.А.
Гельфгат И.М.
Задачи по физике для основной школы с примерами решений. 7–9 классы

Книга содержит качественные, расчетные и олимпиадные задачи по физике для учащихся 7–9 классов. Эти задачи дифференцированы по сложности на 3 уровня. Книга структурирована максимально удобно для учителей и учащихся.

В книге представлен широкий набор как простых задач, так и задач повышенной трудности (в том числе и олимпиадных), что позволяет использовать сборник также на факультативах и при подготовке к олимпиадам.

Генденштейн Л.Э.
Кирик Л.А.
Гельфгат И.М.
Решения ключевых задач по физике для основной школы. 7–9 классы

Эта книга, предназначенная для учащихся 7–9 классов, носит обучающий характер. В ней тщательно отобраны ключевые задачи по курсу физики основной школы, к которым даны подробные решения. В частности, в книге приведены решения к олимпиадным задачам, что позволяет использовать ее для работы в кружках и при подготовке к олимпиадам.

Кирик Л.А.
Генденштейн Л.Э.
Гельфгат И.М.

Задачи по физике для профильной школы с примерами решений. 10–11 классы

Книга содержит качественные, расчетные и олимпиадные задачи по физике для учащихся 10–11 классов. Эти задачи дифференцированы по сложности на 3 уровня. Книга структурирована максимально удобно для учителей и учащихся.

В книге представлен широкий набор как простых задач, так и задач повышенной трудности (в том числе и олимпиадных), что позволяет использовать сборник также на факультативах и при подготовке к олимпиадам.

Гельфгат И.М.
Генденштейн Л.Э.
Кирик Л.А.

Решения ключевых задач по физике для профильной школы. 10–11 классы

Эта книга, предназначенная для учащихся 10–11 классов, носит обучающий характер. В ней тщательно отобраны ключевые задачи по курсу физики профильной школы, к которым даны подробные решения. В частности, в книге приведены решения к олимпиадным задачам, что позволяет использовать ее для работы в кружках и при подготовке к олимпиадам.

ИЛЕКСА

2019432601

Н.А. Шихова

Задачи с экономическим содержанием

Данное учебное пособие предназначено для подготовки к решению задач с экономическим содержанием, входящих в варианты профильного ЕГЭ по математике под номером 17.

Решая задачи с экономическим содержанием, приходится выполнять сложные вычисления, но на экзамене пользоваться калькулятором нельзя. Вычислительные ошибки встречаются даже у сильных школьников. Чтобы их предупредить, в данном пособии особенное внимание уделяется технике вычислений.

В первой главе пособия приведены базовые сведения о методах оптимизации вычислений и преобразований, а также работы с процентами. Эта часть завершается упражнениями, которые можно назвать диагностическими.

Во второй главе решаются задачи о вкладах и кредитах. Рассмотрены две основные схемы выплаты кредитов – аннуитетные и дифференцированные платежи.

В третьей главе рассматриваются задачи на оптимальный выбор.

Завершается пособие контрольной работой.

Пособие предназначено для учащихся, готовящихся к сдаче профильного ЕГЭ, учителей, преподавателей колледжей и студентов педагогических вузов.

ISBN 978-5-89237-462-0

9 785892 374620