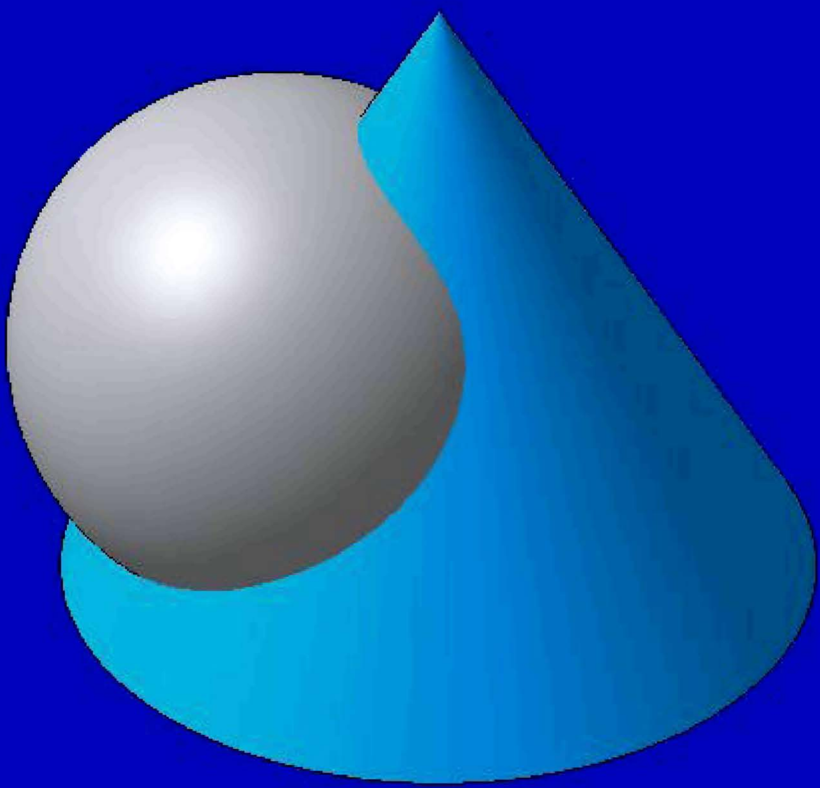
В.А. Герасимов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Брянск 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Брянский государственный технический университет

В.А. Герасимов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Брянск
ИЗДАТЕЛЬСТВО БГТУ
2008

УДК 315 (075)

Герасимов, В. А. Начертательная геометрия: учебное пособие / В. А. Герасимов. – Брянск: БГТУ, 2008. – 128 с.

ISBN 5 – 89838 – 338 – 7

Изложены основы метода проекций и методы изображения геометрических фигур на плоскости. Даны основные сведения о поверхностях. Рассмотрены способы преобразования комплексного чертежа, решения позиционных и метрических задач, построения разверток поверхностей.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения технических специальностей вузов.

Ил.152. Библиогр. 9 назв.

Научный редактор Р. К. Антипова

Рецензенты: кафедра “Графика и геодезия ” Брянской государственной инженерно-технологической академии;
кандидат технических наук Т. И. Татаринцева

Редактор издательства Мажугина Л. Н.
Компьютерный набор Чупина И. И.
Иллюстрации Герасимов В. А.

Темплан 2008 г., п.19

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Офсетная печать. Усл. печ.л. 7,44. Уч.-изд.л. 7,44. Тираж 350 экз. Заказ .

Издательство Брянского государственного технического университета
241035, Брянск, бульвар 50-летия Октября, 7, БГТУ, тел. 58-82-49
Лаборатория оперативной полиграфии БГТУ, ул. Институтская, 16

ISBN 5 – 89838 – 338 – 7

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является разделом геометрии, в котором изучаются методы изображения пространственных геометрических фигур на плоском чертеже. Начертательная геометрия занимается графическим решением пространственных геометрических задач на плоском чертеже.

Один из создателей начертательной геометрии французский ученый Гаспар Монж (1746-1818 гг.) определил ее как «искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению».

Профессор В.И. Курдюмов (1853-1904 гг.) писал: «Если чертеж является языком техники, одинаково понятным всем народам, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка…».

Методы начертательной геометрии используются при конструировании сложных поверхностей в авиационной и автомобильной промышленности. Известна роль начертательной геометрии в архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве, физике, химии, механике, кристаллографии и многих других науках.

Начертательная геометрия является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого невозможно никакое инженерное творчество.

ГЛАВА 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

Под *проекцией* геометрической фигуры на плоскость понимают ее изображение, полученное на этой плоскости с помощью воображаемых проецирующих лучей, подобно тому, как фигура, освещенная солнцем, отбрасывает тень на землю.

Различают два основных способа образования проекций:

1. *Центральное проецирование (перспектива).*
2. *Параллельное проецирование.*

1.1 Центральное проецирование

Аппарат центрального проецирования определяют *плоскость проекций* $\boldsymbol{\pi_1}$ и *центр проецирования* $\boldsymbol{S}$ – точка, не принадлежащая этой плоскости (рис. 1). Центр проецирования берется в произвольной, но не бесконечно удаленной точке.

Центральной проекцией точки называется точка пересечения с плоскостью проекций проецирующего луча, проходящего через центр проецирования и данную точку.

Чтобы получить центральную проекцию точки $\boldsymbol{A}$ (рис. 1), через центр проецирования $\boldsymbol{S}$ и заданную точку проводится проецирующий луч $\boldsymbol{SA}$ до пересечения с плоскостью проекций $\boldsymbol{\pi_1}$.

Если точка $\boldsymbol{B}$ принадлежит плоскости проекций, то ее проекция совпадает с самой точкой $\boldsymbol{B'=B}$ (рис. 1).

Если проецирующий луч, проходящий через точку $\boldsymbol{C}$ (рис. 1), параллелен плоскости проекций, то принято считать, что они пересекаются в бесконечно удаленной точке $\boldsymbol{C}\infty$. Эту точку называют *несобственной.*

По одной проекции точки нельзя однозначно определить положение самой точки в пространстве. Так, точки $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$, $\boldsymbol{D_3}$ (рис.1), лежащие на проецирующем луче $\boldsymbol{SD}$ имеют одну и ту же проекцию $\boldsymbol{D'}$.

Две центральные проекции точки, полученные из центров S_1 и S_2 ,однозначно определяют ее положение в пространстве (рис. 2).

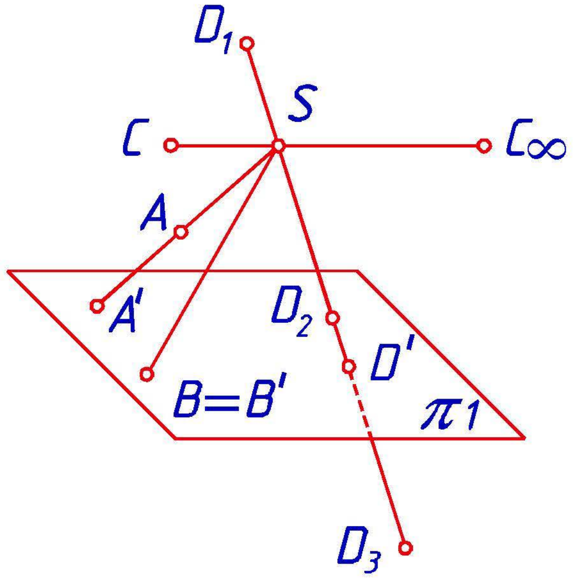


Рис.1

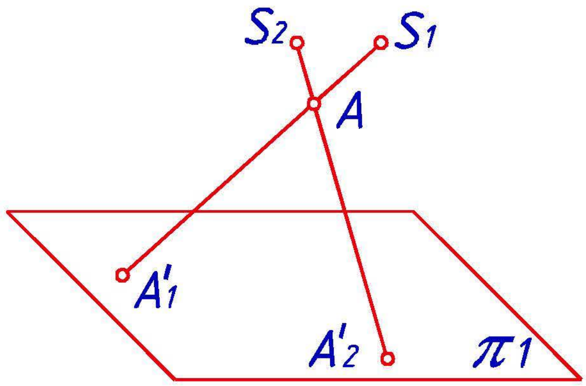


Рис.2

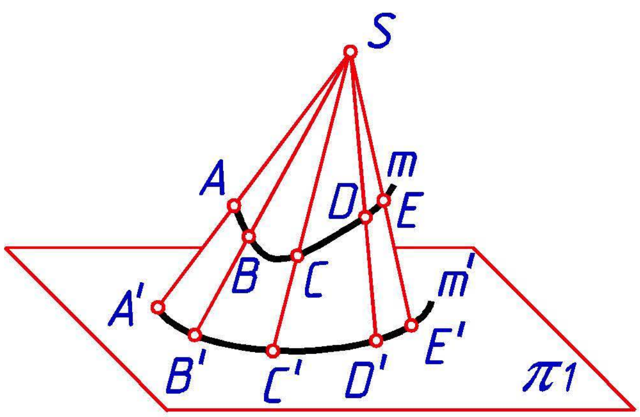


Рис.3

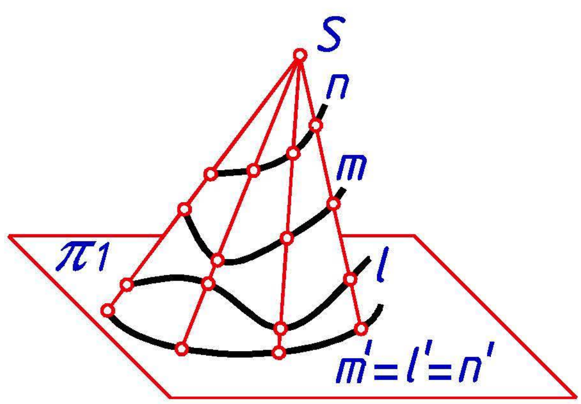


Рис.4

Проекцию линии ***m*** можно построить, проецируя ряд принадлежащих ей точек (рис. 3). При этом проецирующие лучи образуют коническую поверхность. Как видно из рис. 4, одна проекция линии ***m*** не определяет ее положение в пространстве, так как на конической поверхности можно разместить ряд линий ***(m, n, l),*** проекции которых совпадают ***(m'=n'= l')***.

1.2. Параллельное проецирование

Аппарат параллельного проецирования определяют *плоскость проекций* $\boldsymbol{\pi_1}$ и *вектор* $\boldsymbol{S}$, который называют *направлением проецирования* (рис. 5). При параллельном проецировании все проецирующие лучи параллельны направлению проецирования. В зависимости от угла $\boldsymbol{\alpha}$ между проецирующими лучами и плоскостью проекций (рис. 5) параллельные проекции делятся на *косоугольные* ($\boldsymbol{\alpha} \neq 90^o$) и *прямоугольные (ортогональные)* ($\boldsymbol{\alpha} = 90^o$).

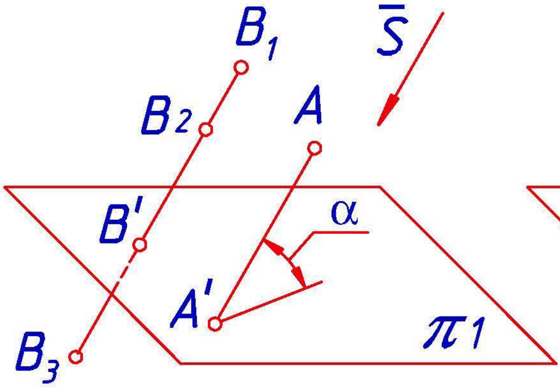


Рис.5

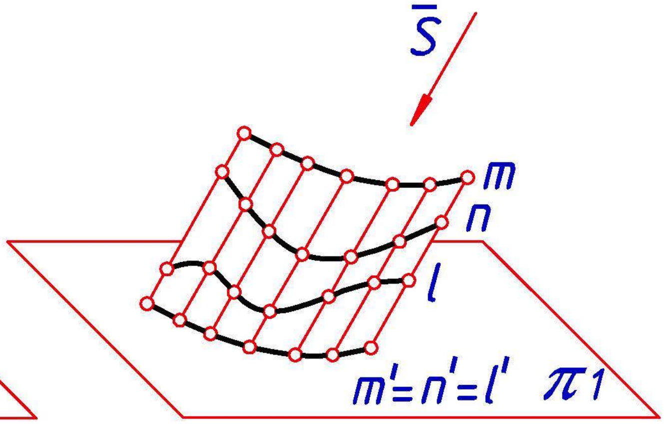


Рис.6

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, когда центр проецирования находится в бесконечно удаленной (несобственной) точке.

Параллельной проекцией точки называется точка пересечения с плоскостью проекций проходящего через данную точку проецирующего луча, параллельного направлению проецирования.

Чтобы построить параллельную проекцию точки $\boldsymbol{A}$ (рис. 5), через нее параллельно направлению проецирования $\boldsymbol{S}$ проводится проецирующий луч до пересечения с плоскостью проекций.

При параллельном проецировании, как и при центральном, любая точка пространства имеет одну вполне определенную проекцию. Обратное утверждение неверно. Например, точки $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$ имеют одну и ту же проекцию $\boldsymbol{B'}$.

Однозначно определяют положение точки в пространстве ее две проекции.

Чтобы получить параллельную проекцию m' линии m (рис. 6), необходимо соединить проекции принадлежащих ей точек. Проецирующие лучи, проходящие через эти точки, в своей совокупности образуют цилиндрическую поверхность. Этой поверхности может принадлежать ряд линий, все они будут иметь одну и ту же проекцию (рис. 6).

Только чертеж, состоящий из не менее двух проекций геометрической фигуры-оригинала, обратим – по нему можно восстановить форму оригинала, его размеры и положение в пространстве.

1.3. Основные инвариантные свойства параллельного проецирования

В общем случае геометрические фигуры проецируются на плоскость проекций с искажениями. Характер искажения проекций по сравнению с фигурой-оригиналом зависит от аппарата проецирования и положения фигуры относительно плоскости проекций.

Наряду с этим между фигурой-оригиналом и ее проекцией существует связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства фигуры сохраняются и на ее проекции. Эти свойства называют *инвариантными* (независимыми) относительно способа проецирования. Перечислим основные инвариантные свойства параллельного проецирования:

1. Проекция точки на плоскость есть точка.
2. Проекция прямой на плоскость в общем случае есть прямая. Она вырождается в точку, если прямая параллельна направлению проецирования.
3. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии.
4. Если отрезок прямой линии делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.

5. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций.

6. Проекции отрезков параллельных прямых параллельны, и их длины находятся в таком же отношении, как и длины проецируемых отрезков.

7. Проекции двух скрещивающихся прямых линий в зависимости от направления проецирования могут пересекаться или быть параллельными.

8. При прямоугольном проецировании прямой угол проецируется без искажения (прямым углом), если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей.

9. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость без искажения.

10. При параллельном перемещении фигуры или плоскости проекций изображение фигуры на этой плоскости не изменяется.

Контрольные вопросы

1. Как называются основные способы образования проекций?
2. Как строится центральная проекция точки?
3. В каком случае центральная проекция прямой линии представляет собой точку?
4. В чем заключается способ проецирования, называемый параллельным?
5. Как взаимно располагаются проекции двух параллельных прямых?
6. Что означает слово "ортогональный"?

ГЛАВА 2. ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Система из трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций является наиболее удобной для определения положения геометрической фигуры в пространстве и выявления ее формы по ортогональным проекциям (рис. 7). Плоскости проекций называются: $\boldsymbol{\pi_1}$ – *горизонтальная плоскость проекций*; $\boldsymbol{\pi_2}$ – *фронтальная плоскость проекций*; $\boldsymbol{\pi_3}$ – *профильная плоскость проекций.*

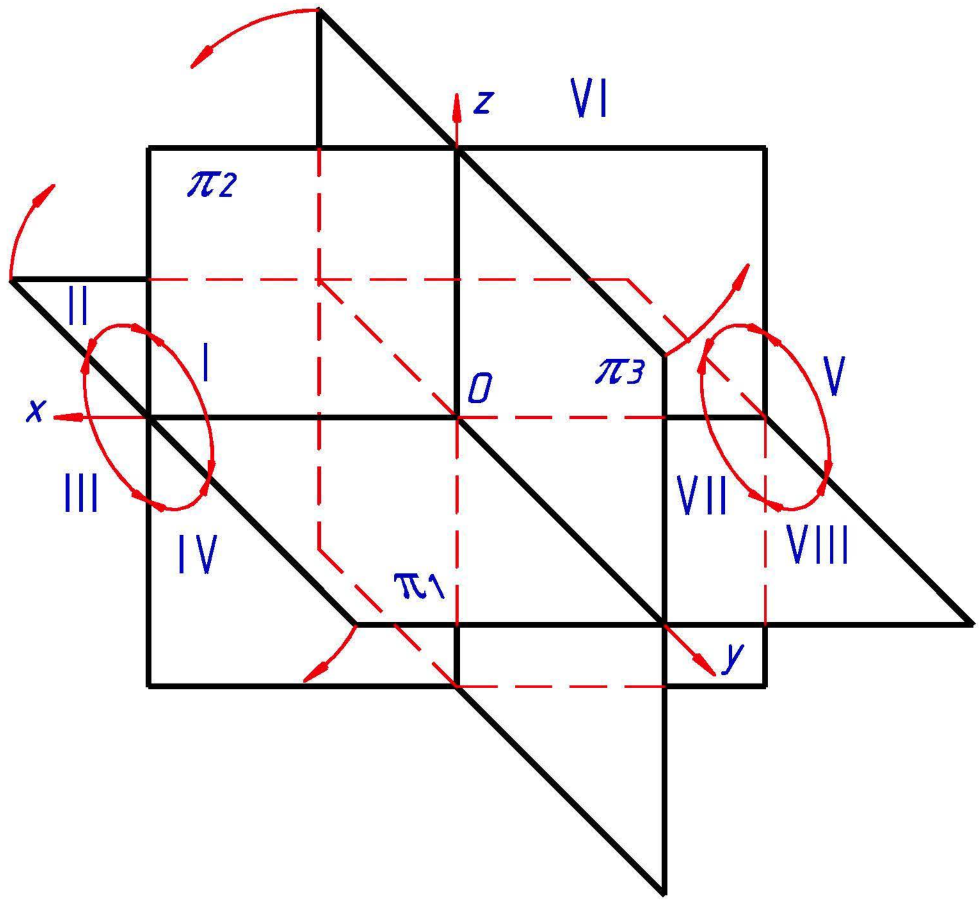


Рис.7

Плоскости проекций попарно пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым, которые образуют оси координат. Оси делят каждую из плоскостей проекций на *полы (полуплоскости)*. Координатные оси обозначают: ***X*** – *ось абсцисс;* ***Y*** – *ось ординат;* ***Z*** – *ось аппликат.* В точке пересечения осей находится *начало координат* **0**. Положительное направление осей показано стрелками.

Три плоскости проекций делят пространство на восемь частей – *октантов*. Нумерация октантов показана на рис. 7.

Пользоваться пространственным макетом для изображения проекций геометрической фигуры неудобно ввиду его громоздкости, поэтому его преобразуют в комплексный чертеж (*эпюр Монжа*). Преобразование осуществляется путем совмещения плоскостей π_1 и π_3 с фронтальной плоскостью проекций π_2 (рис. 7).

Комплексный чертеж (эпюр) – плоский чертеж, составленный из двух или трех связанных между собой ортогональных проекций геометрической фигуры.

2.1. Проекции точки

На пространственном макете построим ортогональные проекции точки A на три плоскости проекций (рис. 8). Для этого через точку A перпендикулярно к плоскостям π_1, π_2, π_3 проведем проецирующие лучи. В точках пересечения этих лучей с плоскостями проекций получим ортогональные проекции точки A: A' – горизонтальную проекцию; A'' – фронтальную проекцию; A''' – профильную проекцию.

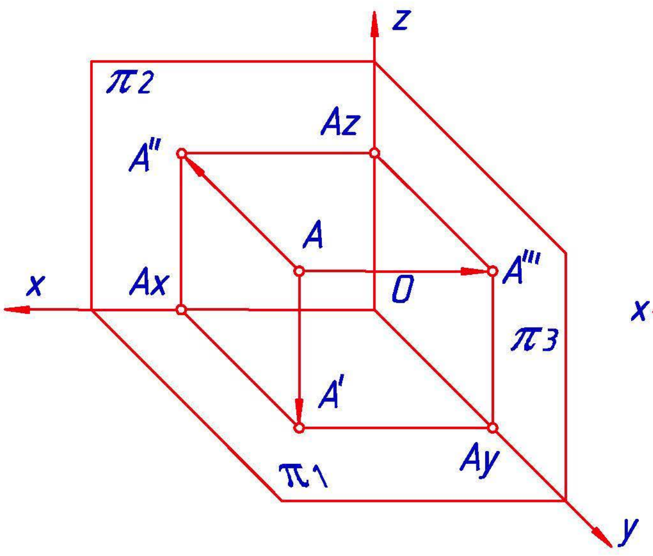


Рис.8

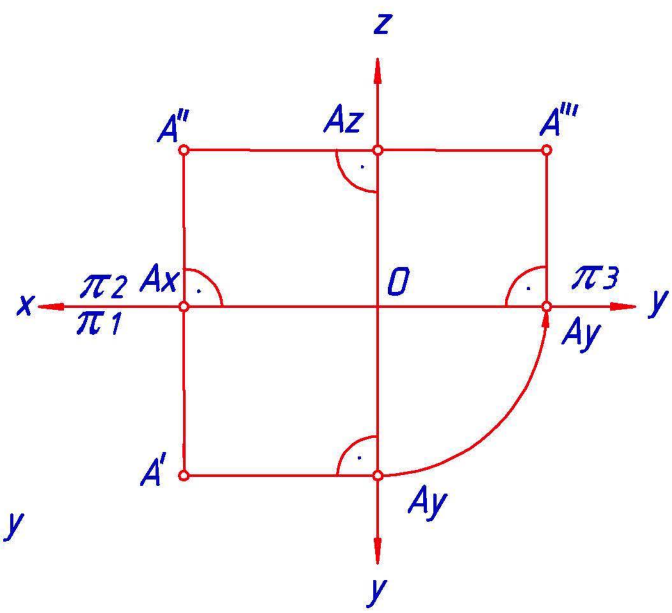


Рис.9

Преобразуем пространственный макет точки $\boldsymbol{A}$ (рис. 8) в ее комплексный чертеж (рис. 9).

Положение точки $\boldsymbol{A}$ (рис. 8, 9) в пространстве определяют три ее координаты: $\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$.

Координата точки – число, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки до соответствующей плоскости проекций.

Координата $\boldsymbol{X_A}$ определяет величину расстояния от точки $\boldsymbol{A}$ до профильной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$: $\boldsymbol{X_A = AA''' = OA_X = A'A_Y = A''A_Z}$.

Координата $\boldsymbol{Y_A}$ определяет величину расстояния от точки $\boldsymbol{A}$ до фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$: $\boldsymbol{Y_A = AA'' = OA_Y = A'A_X = A'''A_Z}$.

Координата $\boldsymbol{Z_A}$ определяет величину расстояния от точки $\boldsymbol{A}$ до горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_1}$: $\boldsymbol{Z_A = AA' = OA_Z = A''A_X = A'''A_Y}$.

Пусть дана точка ***A(60,25,15).*** Эта запись означает, что координата $\boldsymbol{X_A = 60}$ ***мм***, $\boldsymbol{Y_A = 25}$ ***мм***, $\boldsymbol{Z_A = 15}$ ***мм***.

Независимо от положения точки в пространстве на комплексном чертеже ее горизонтальная и фронтальная проекции соединяются *линией связи* – прямой, перпендикулярной оси $\boldsymbol{X}$, фронтальная и профильная проекции соединяются другой линией связи – прямой, перпендикулярной оси $\boldsymbol{Z}$.

Точка может принадлежать одной из плоскостей проекций или находиться в одном из восьми октантов. Номер этого октанта можно определить, построив по координатам точки пространственный макет или проанализировав знаки координат точки по таблице:

Октант	Знаки координат			Октант	Знаки координат		
	X	**Y**	**Z**		**X**	**Y**	**Z**
I	+	+	+	**V**	–	+	+
II	+	–	+	**VI**	–	–	+
III	+	–	–	**VII**	–	–	–
IV	+	+	–	**VIII**	–	+	–

Зная две любые проекции точки, можно определить ее третью проекцию.

*Если известны горизонтальная (**A'**) и фронтальная (**A''**) проекции точки (**A**)* (рис. 10), *то для определения ее профильной проекции (**A'''**) необходимо из фронтальной проекции точки (**A''**)* *провести прямую, перпендикулярную к оси* ***Z****. На этой прямой от точки ее пересечения с осью* ***Z*** *(*$\boldsymbol{A_Z}$*) отложить отрезок, равный по величине координате* ***Y*** *точки (*$\boldsymbol{Y_A}$*). Откладываем вправо, если координата* ***Y*** *точки положительна, и влево, если отрицательна.*

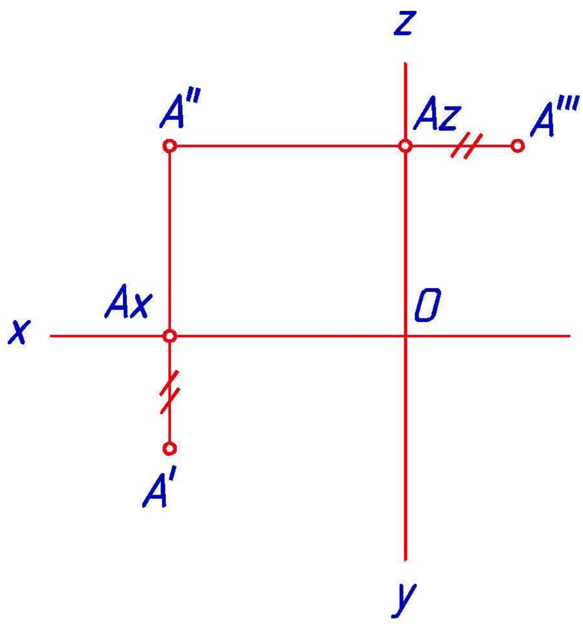


Рис. 10

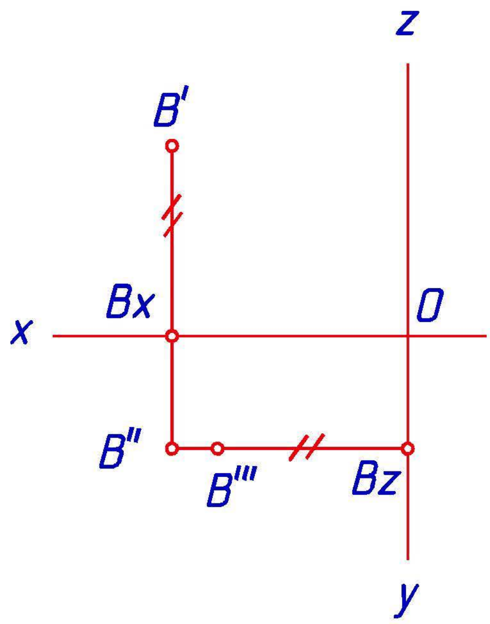


Рис. 11

Точка ***A*** (рис. 10) расположена в первом октанте, так как положительные знаки имеют ее координаты ***X*** **,** ***Y***, ***Z***.

Точка ***B*** (рис. 11) расположена в третьем октанте. Координаты ***Y*** и ***Z*** этой точки имеют отрицательные знаки, а координата ***X*** – положительный .

2.2. Проекции прямой линии

Из инвариантных свойств параллельного проецирования известно, что *проекция прямой на плоскость в общем случае есть прямая. Она вырождается в точку, если прямая параллельна направлению проецирования.*

Для определения проекций прямой линии достаточно задать проекции двух несовпадающих точек, принадлежащих этой прямой.

Соединив прямыми одноименные проекции этих точек, получим проекции отрезка прямой. Проекции прямой обозначают строчными буквами латинского алфавита, например $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{a''}$, $\boldsymbol{a'''}$.

В зависимости от положения прямых относительно плоскостей проекций различают:

Прямые общего положения – прямые, не параллельные ни одной из плоскостей проекций (рис. 12, 13).

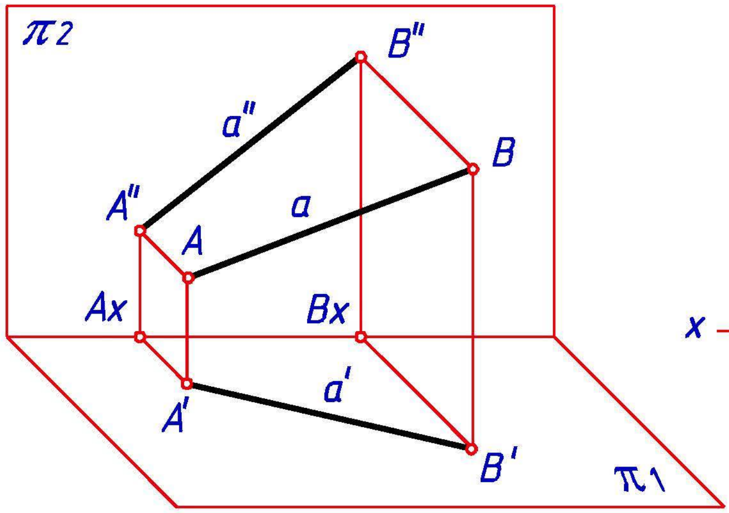


Рис. 12

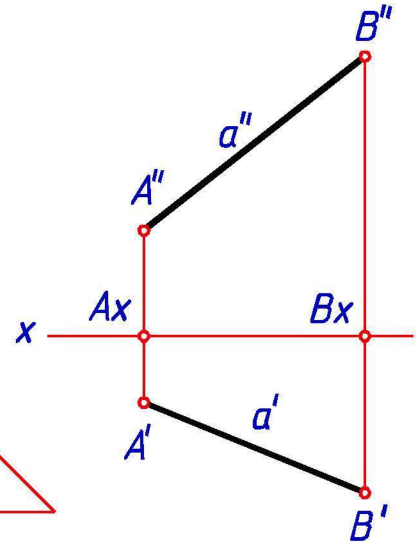


Рис. 13

Прямые уровня – прямые, параллельные одной из плоскостей проекций.

Проецирующие прямые – прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций.

2.2.1. Прямые уровня

Горизонталь – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций. Горизонталь обозначается буквой $\boldsymbol{h}$. Горизонталь $\boldsymbol{h}$ и углы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ наклона ее соответственно к плоскостям $\boldsymbol{\pi_2}$ и $\boldsymbol{\pi_3}$ проецируются на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ без искажения (рис. 14).

Фронталь – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций. Фронталь обозначается буквой $\boldsymbol{f}$. Фронталь $\boldsymbol{f}$ и углы $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$

наклона ее соответственно к плоскостям π_1 и π_3 проецируются на плоскость π_2 без искажения (рис. 15).

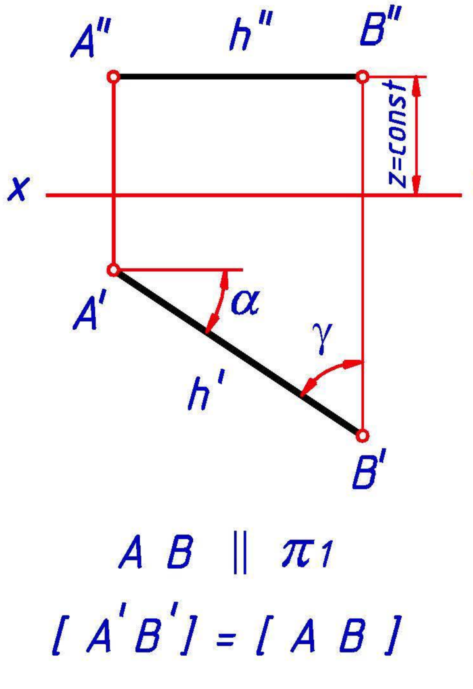


Рис. 14

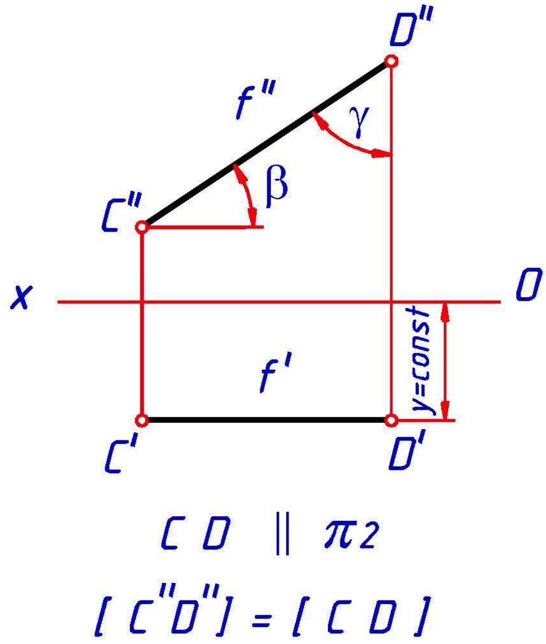


Рис. 15

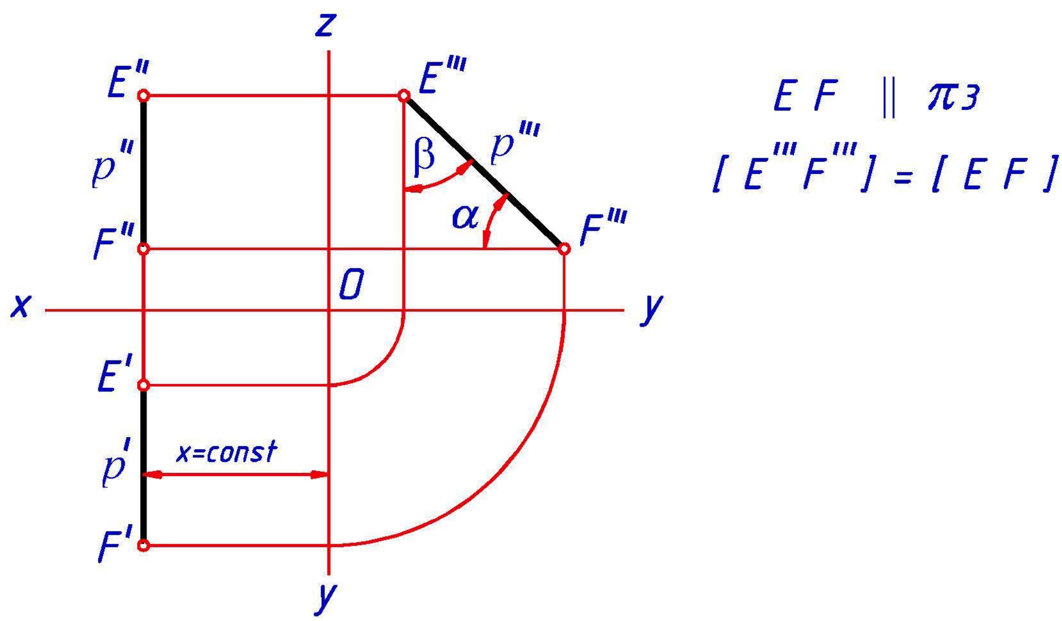


Рис. 16

Профильная прямая – прямая, параллельная профильной плоскости проекций. Профильная прямая обозначается буквой p.

Профильная прямая и углы α и β наклона ее соответственно к плоскостям π_1 и π_2 проецируются на плоскость π_3 без искажения (рис. 16). Фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой располагаются параллельно оси Z, или, что то же, перпендикулярно к оси X.

2.2.2. Проецирующие прямые

Горизонтально проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция этой прямой вырождается в точку (рис. 17). Так как горизонтально проецирующая прямая параллельна одновременно плоскостям π_2 и π_3, то на них она проецируется без искажения. Эта прямая одновременно является фронталью и профильной прямой.

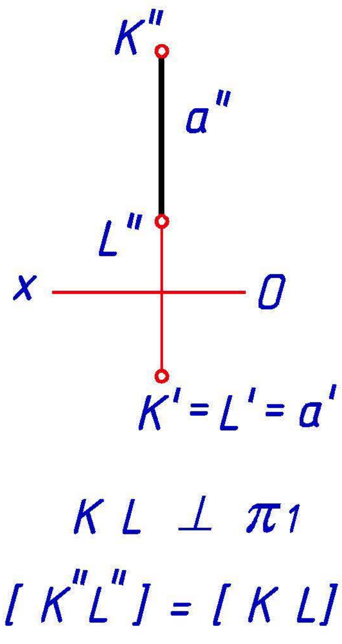


Рис. 17

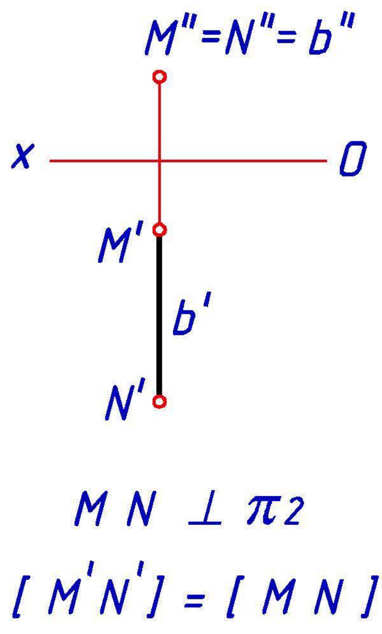


Рис. 18

Фронтально проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция прямой вырождается в точку, а на плоскости π_1 и π_3 она проецируется без искажения (рис. 18). Эта прямая одновременно является горизонталью и профильной прямой.

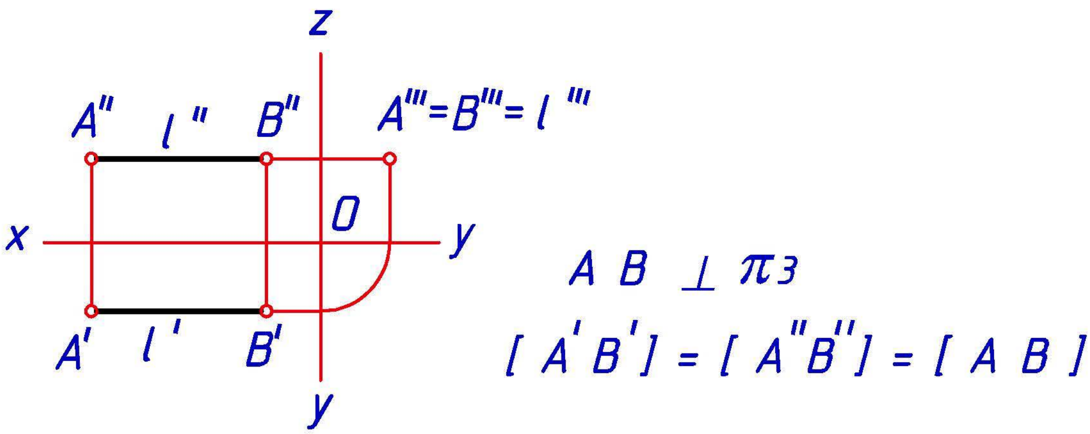


Рис. 19

Профильно проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекции. Профильная проекция прямой вырождается в точку, а на плоскости π_1 и π_2 она проецируется без искажения (рис. 19). Эта прямая одновременно является горизонталью и фронталью.

2.3. Определение натуральной величины отрезка прямой способом прямоугольного треугольника

Только на комплексном чертеже отрезка прямой уровня или проецирующей прямой видна его натуральная величина. Во всех остальных случаях проекция отрезка прямой всегда меньше его натуральной величины.

На рис. 20 показано, что натуральная величина (н.в.) отрезка ***AB*** прямой общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника ***ABK***. В этом треугольнике катет ***AK*** параллелен плоскости проекций π_1 и равен горизонтальной проекции отрезка **A'B'**, катет **BK** равен разности расстояний точек **A** и **B** от плоскости π_1.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Этот угол находят из прямоугольного треугольника, который строят для определения натуральной величины отрезка прямой.

Построения для определения натуральной величины отрезка прямой **AB** и угла α – угла наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций приведены на комплексном чертеже (рис. 21).

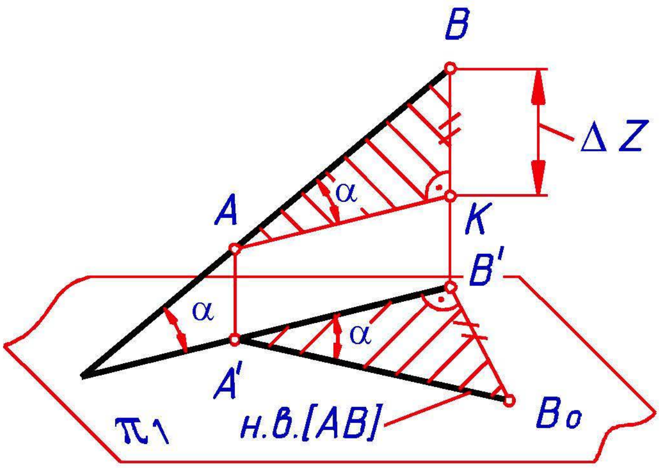


Рис. 20

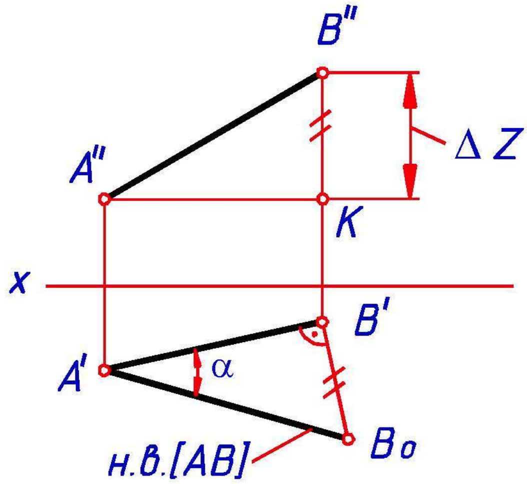


Рис. 21

Для определения угла наклона прямой к фронтальной плоскости проекций необходимо выполнить аналогичные построения на фронтальной проекции отрезка.

В общем случае для определения натуральной величины отрезка прямой необходимо построить гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого является горизонтальная (фронтальная) проекция отрезка, другим катетом – отрезок, равный по величине алгебраической разности координат ***Z (Y)*** *крайних точек отрезка.*

2.4. Деление отрезка прямой в заданном отношении

Из инвариантных свойств параллельного проецирования известно, что *если точка делит отрезок прямой в данном отношении, то проекции этой точки делят одноименные проекции прямой в том же отношении*. Для графического деления отрезка прямой необходимо воспользоваться теоремой *Фале́са* [1].

Пример. Найти проекции точки ***C***, делящей отрезок ***AB*** в отношении ***AC:CB=3:2*** (рис. 22).

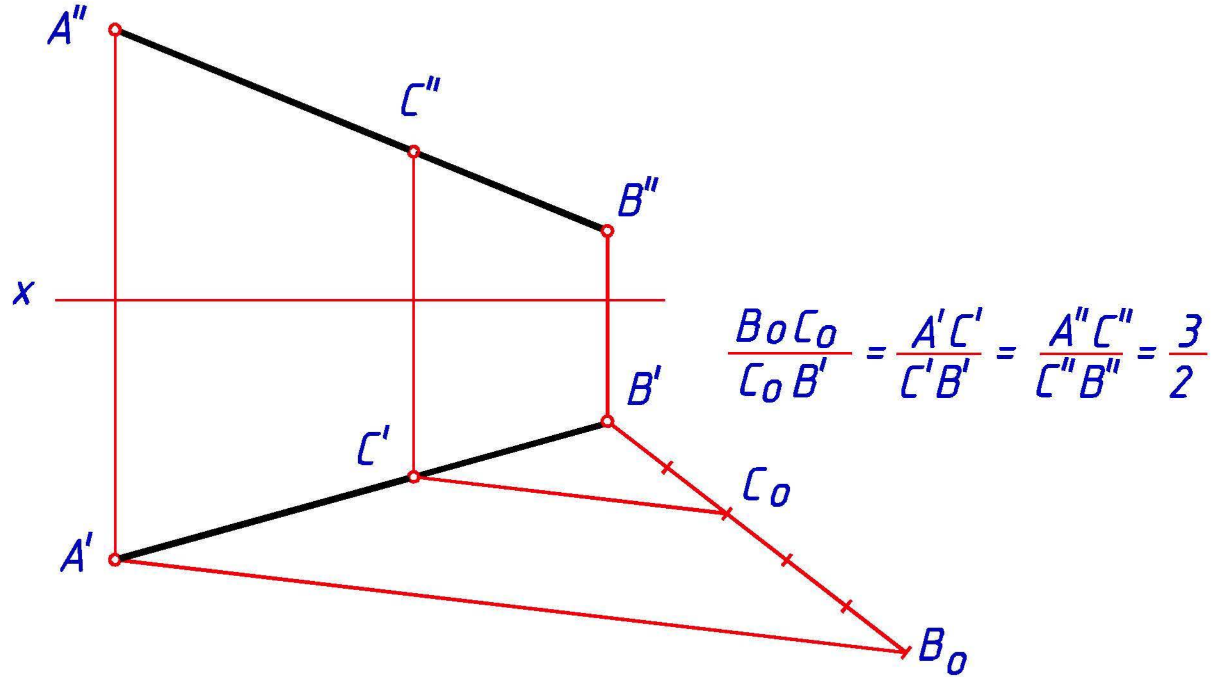


Рис. 22

Р е ш е н и е. Для графического деления отрезка в заданном отношении из конца одной из его проекций (***B'***) под произвольным углом проведем вспомогательную прямую и на ней отложим **3+2=5** равных отрезков любой длины. Получим отрезок $\boldsymbol{B'B_O}$. Точки $\boldsymbol{B_O}$ и ***A'*** соединим прямой. Через точку $\boldsymbol{C_O}$ проведем прямую, параллельную $\boldsymbol{A'B_O}$.

---

[1] Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

В пересечении этой прямой с проекцией отрезка $A'B'$ получим горизонтальную проекцию искомой точки (C'). Ее фронтальную проекцию C'' найдем по линии связи на фронтальной проекции отрезка.

2.5. Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

Следы прямой являются точками, в которых прямая переходит из одного октанта в другой.

В общем случае прямая, например l, может пересекать все три плоскости проекций и иметь три следа:

- *горизонтальный след* H_l – точка пересечения прямой l с плоскостью π_1, ее координата $Z_H = 0$;

- *фронтальный след* F_l – точка пересечения прямой l с плоскостью π_2 ($Y_F = 0$);

- *профильный след* W_l – точка пересечения прямой l с плоскостью π_3 ($X_W = 0$).

Прямая не имеет следа на плоскости проекций, если она параллельна этой плоскости.

Каждый след, являясь точкой, одновременно принадлежащей и данной прямой и одной из плоскостей проекций, совпадает с одноименной своей проекцией ($H_l = H_l'$, $F_l = F_l''$, $W_l = W_l'''$).

Пусть имеется прямая общего положения l, заданная двумя точками A и B. В системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_2$ построим наглядное изображение этой прямой (рис. 23). В пересечении прямой l с плоскостями проекций π_1 и π_2 определим соответственно ее следы: H_l – горизонтальный; F_l – фронтальный.

Фронтальная проекция горизонтального следа H_l'' и горизонтальная проекция фронтального следа F_l' лежат на оси X.

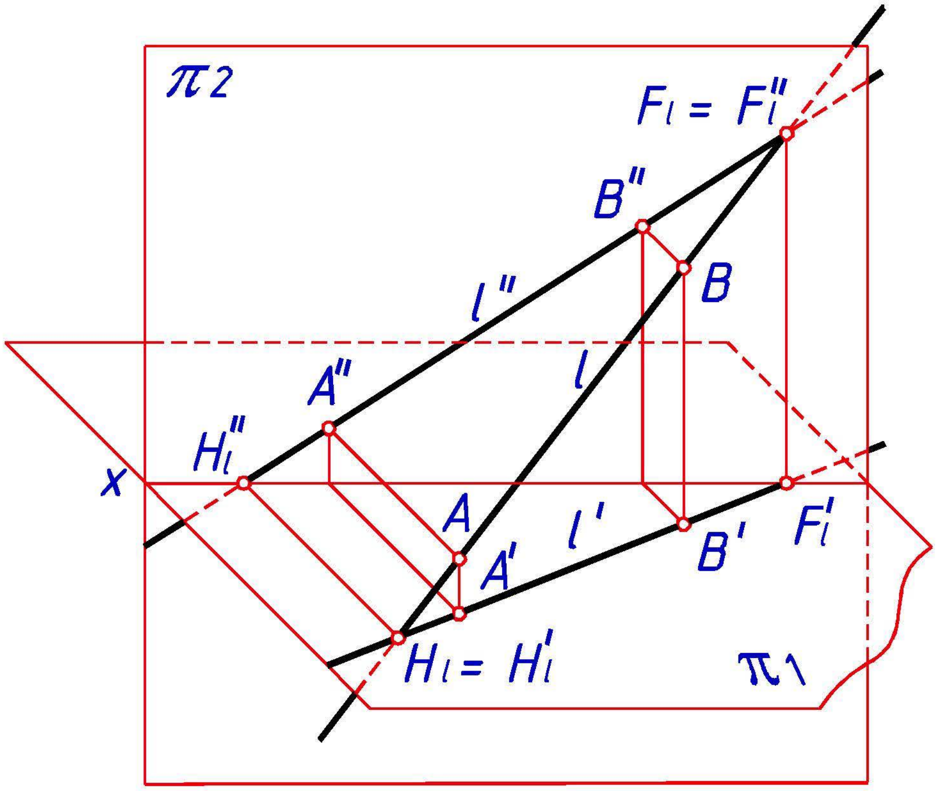

π2
Fl = F''l
B''
B
l''
l
A''
H''l
x
A
l'
F'l
A'
B'
Hl = H'l
π1

Рис. 23

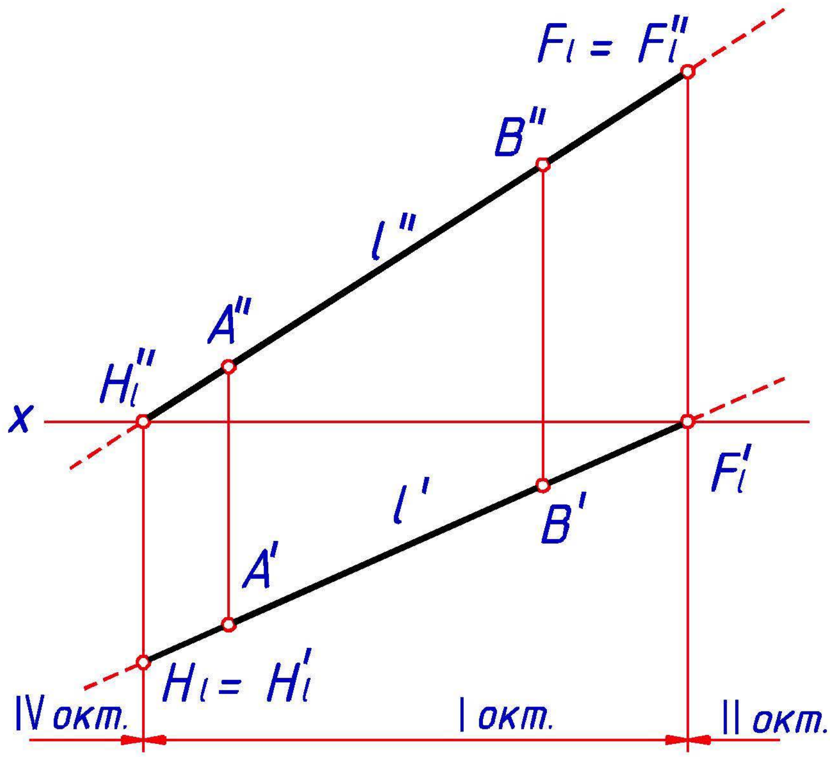

Fl = F''l
B''
l''
A''
H''l
x
l'
F'l
B'
A'
Hl = H'l
IV окт.
I окт.
II окт.

Рис. 24

Отмеченные особенности позволяют сформулировать *правила построения следов прямой на комплексном чертеже*:

1. Для построения горизонтального следа прямой $\boldsymbol{l}$ необходимо в пересечении ее фронтальной проекции с осью $\boldsymbol{X}$ найти $\boldsymbol{H_l''}$ – фронтальную проекцию горизонтального следа прямой. Затем по линии связи на горизонтальной проекции прямой найти горизонтальный след и его горизонтальную проекцию ($\boldsymbol{H_l = H_l'}$).

2. Для построения фронтального следа прямой $\boldsymbol{l}$ необходимо в пересечении ее горизонтальной проекции с осью $\boldsymbol{X}$ и найти $\boldsymbol{F_l'}$ – горизонтальную проекцию фронтального следа прямой. Затем по линии связи на фронтальной проекции прямой найти фронтальный след и его фронтальную проекцию ($\boldsymbol{F_l = F_l''}$).

Построение следов прямой $\boldsymbol{l}$ на комплексном чертеже показано на рис. 24.

Номера октантов, которые пересекает прямая, определяют с помощью вспомогательных точек, принадлежащих прямой.

2.6. Взаимное положение двух прямых

Две прямые могут быть пересекающимися, параллельными, скрещивающимися.

Пересекающиеся прямые – две прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в собственной точке. Точки пересечения их одноименных проекций находятся на одной линии связи (рис.25).

Параллельные прямые – две прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в несобственной точке. Одноименные проекции отрезков параллельных прямых параллельны, и их длины находятся в таком же отношении, как и длины проецируемых отрезков (рис. 26).

Скрещивающиеся прямые – две прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости. Точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.

Каждая точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых представляет собой проекции двух точек, одна из которых принадлежит первой прямой, а другая – второй (рис. 27).

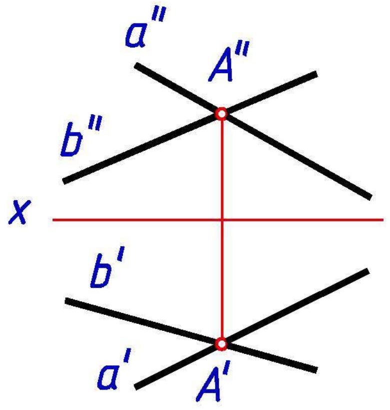


Рис. 25

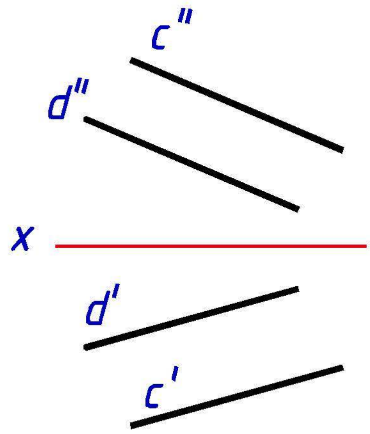


Рис. 26

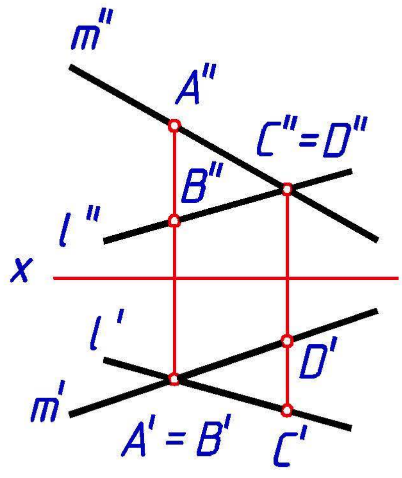


Рис. 27

Контрольные вопросы

1. Как называются плоскости проекций π_1, π_2, π_3?

2. В какой последовательности записываются координаты точки?

3. Какие знаки имеют координаты точки, расположенной в седьмом октанте?

4. Как расположена прямая в системе плоскостей π_1, π_2, π_3, если все три проекции отрезка этой прямой равны между собой?

5. В каком случае проекции прямого угла на плоскости проекций π_1, π_2 равны 90° ?

6. Какая координата равна нулю: а) для фронтального следа прямой, б) для горизонтального следа прямой?

ГЛАВА 3. ПЛОСКОСТЬ

Плоскость является простейшей поверхностью. Она безгранична и делит пространство на две части. Часть плоскости, ограниченную контуром, называют отсеком.

3.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже

На комплексном чертеже плоскость может быть задана следующими способами:

1. Проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 28).
2. Проекциями прямой и не принадлежащей ей точки (рис. 29).
3. Проекциями двух параллельных прямых (рис. 30).
4. Проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 31).
5. Проекциями плоской фигуры, например треугольника (рис. 32).
6. Следами плоскости.

Всегда можно перейти от одного способа задания плоскости к другому.

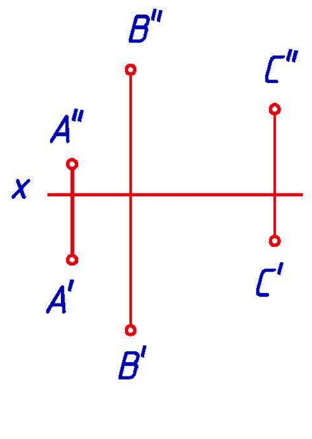


Рис. 28

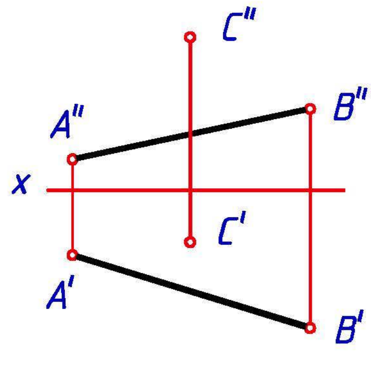


Рис. 29

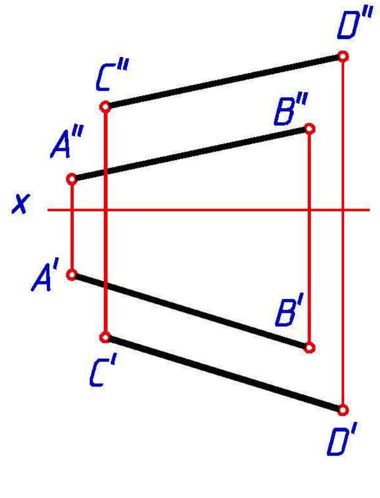


Рис. 30

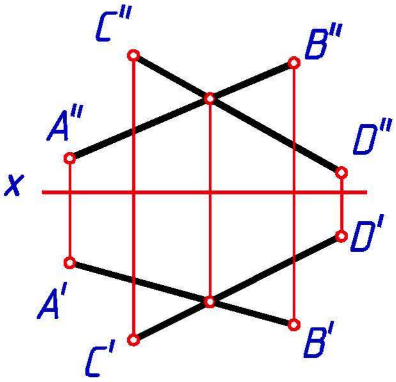


Рис.31

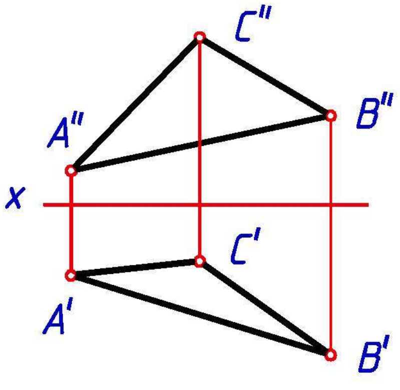


Рис.32

Следом плоскости называется прямая пересечения плоскости с плоскостью проекций. След плоскости является геометрическим местом одноименных с ним следов прямых, принадлежащих плоскости.

Каждый след плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие его проекции лежат на координатных осях (их никак не обозначают). Например, горизонтальный след плоскости совпадает со своей горизонтальной проекцией, его фронтальная проекция находится на оси $\boldsymbol{X}$, а профильная – на оси $\boldsymbol{Y}$ (рис. 33).

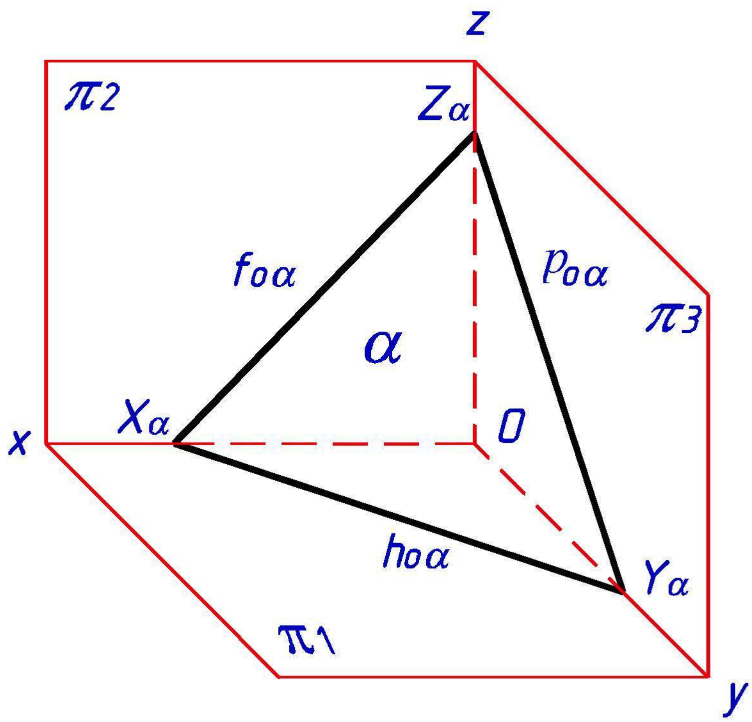


Рис. 33

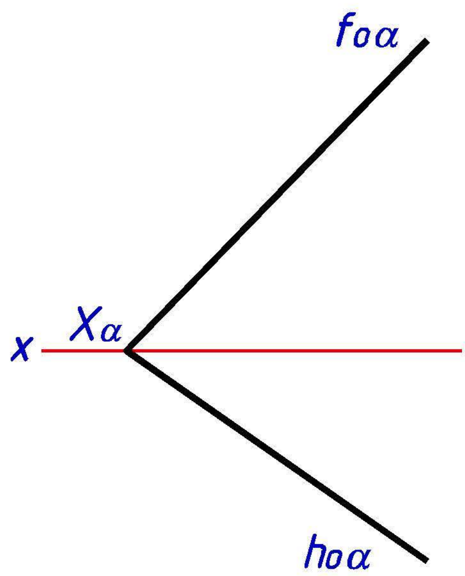


Рис. 34

На двухпроекционном комплексном чертеже (рис. 34) плоскость α задана проекциями ее следов.

Следы плоскости α обозначают: $h_{0\alpha}$ – горизонтальный след ; $f_{0\alpha}$ – фронтальный след; $p_{0\alpha}$ – профильный след.

Точками схода следов называют точки X_α , Y_α , Z_α , в которых пересекаются два следа. Точки схода следов всегда располагаются на соответствующих координатных осях.

Пример 1. Построить следы плоскости α, заданной двумя пересекающимися прямыми a и b (рис.35).

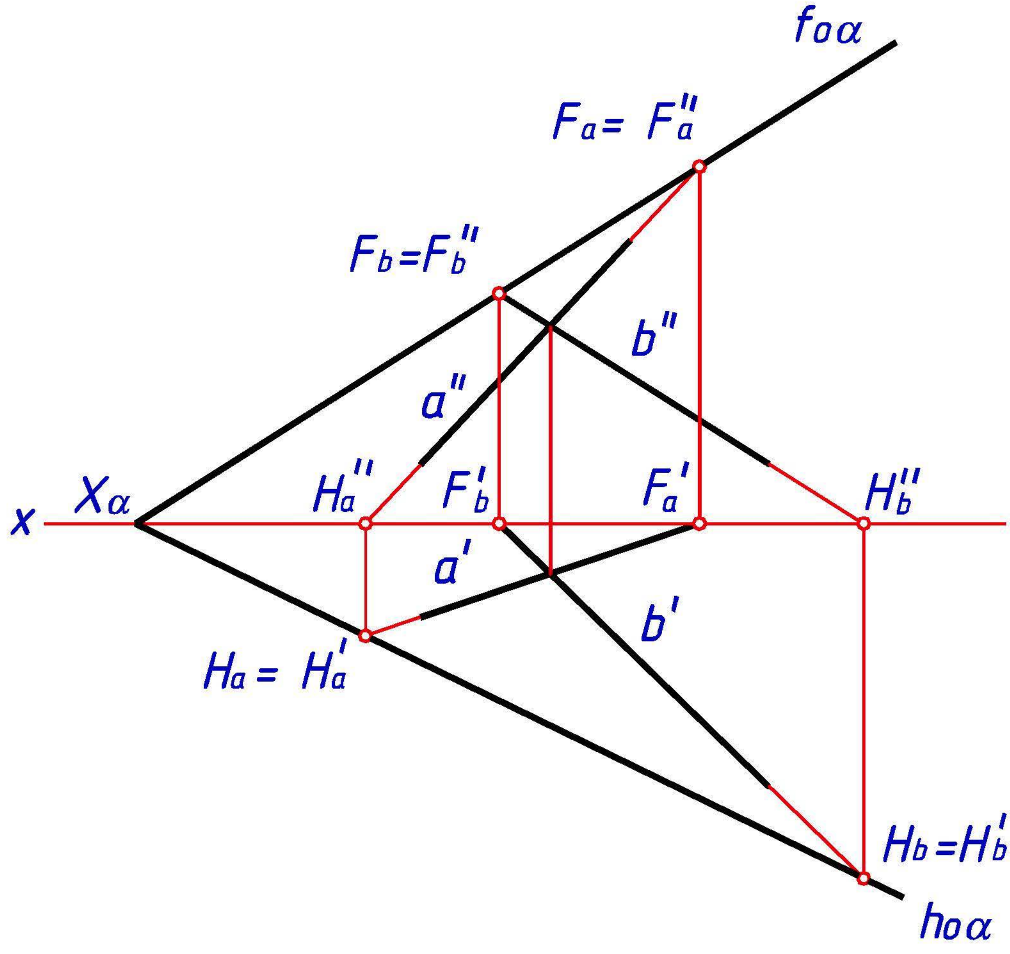


Рис.35

Р е ш е н и е. Для построения фронтального следа плоскости $f_{0\alpha}$ достаточно найти две принадлежащие ему точки F_a и F_b – два одноименных с ним следа прямых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Проведя через эти точки прямую, получаем след плоскости f_{oa} и точку схода следов X_{oa}.

Одной точкой, принадлежащей горизонтальному следу плоскости h_{oa} , будет являться точка схода следов плоскости X_{oa}, другой точкой – горизонтальный след одной из прямых, например H_b.

3.2. Положения плоскости в пространстве

В зависимости от положения плоскости относительно плоскостей проекций различают:

Плоскости общего положения – плоскости, не перпендикулярные ни к одной из плоскостей проекций.

Проецирующие плоскости – плоскости, перпендикулярные лишь к одной из плоскостей проекций.

Плоскости уровня – плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций.

3.2.1. Проецирующие плоскости

Характерной особенностью проецирующей плоскости является то, что любые геометрические фигуры, лежащие в ней, проецируются на перпендикулярную ей плоскость проекций в виде прямых линий (рис. 36 - 41).

Угол φ между проецирующей плоскостью и каждой из двух не перпендикулярных к ней плоскостей проекций проецируется на перпендикулярную к ней плоскость проекций без искажения.

Горизонтально проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 36,37).

Фронтально проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (рис. 38,39).

Профильно проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рис.40,41).

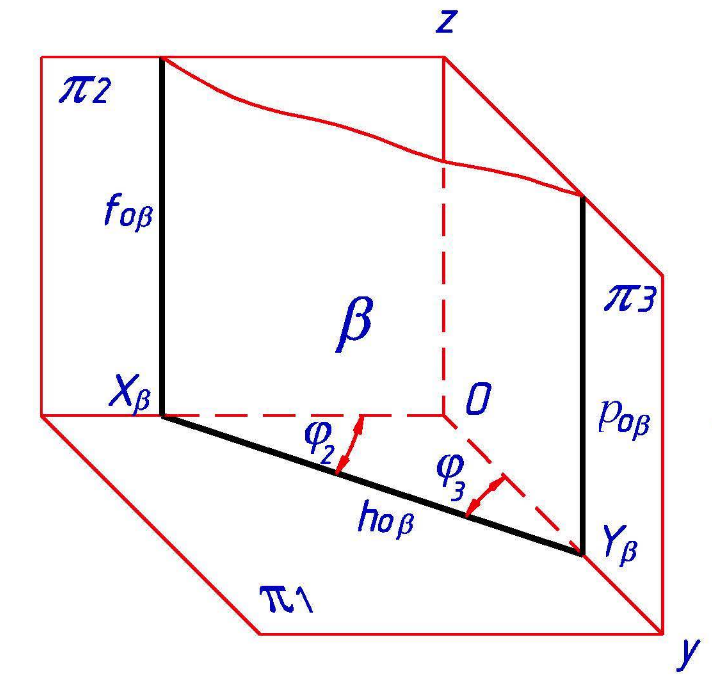


Рис. 36

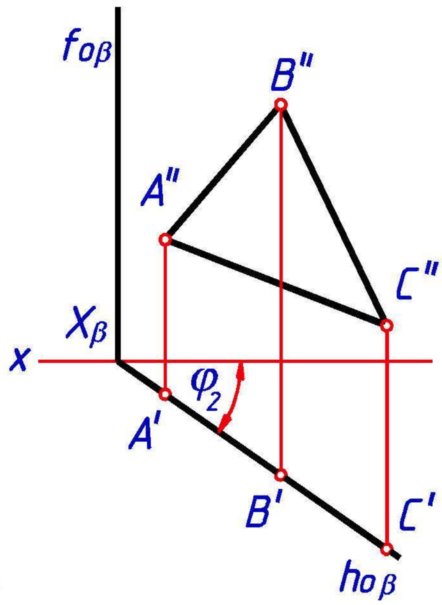


Рис. 37

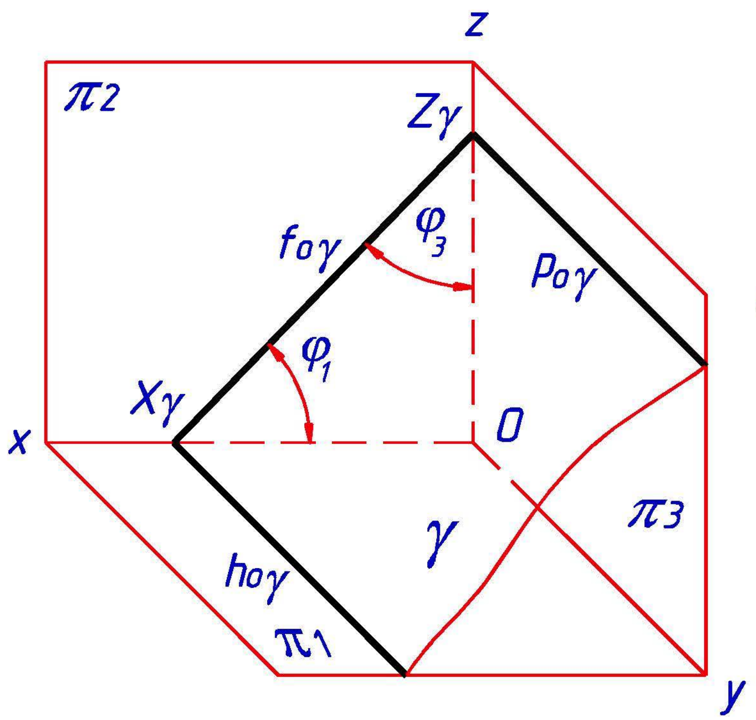


Рис. 38

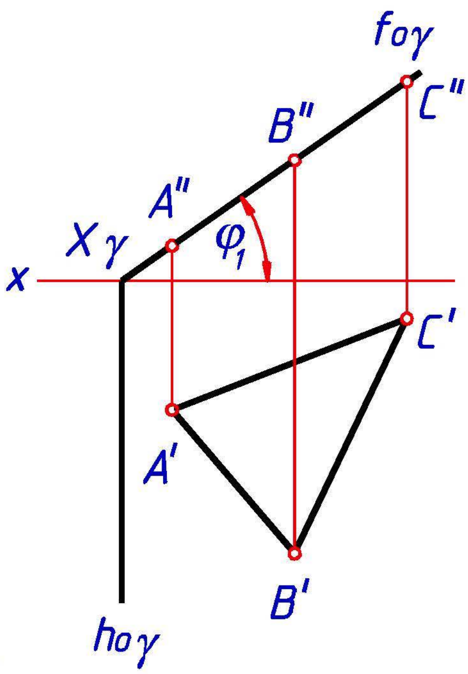


Рис. 39

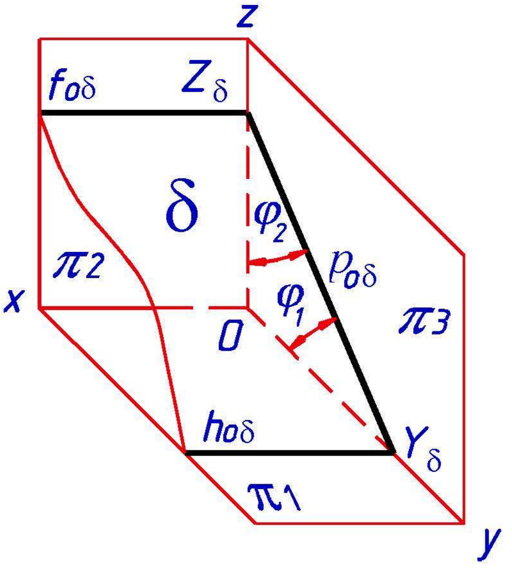


Рис. 40

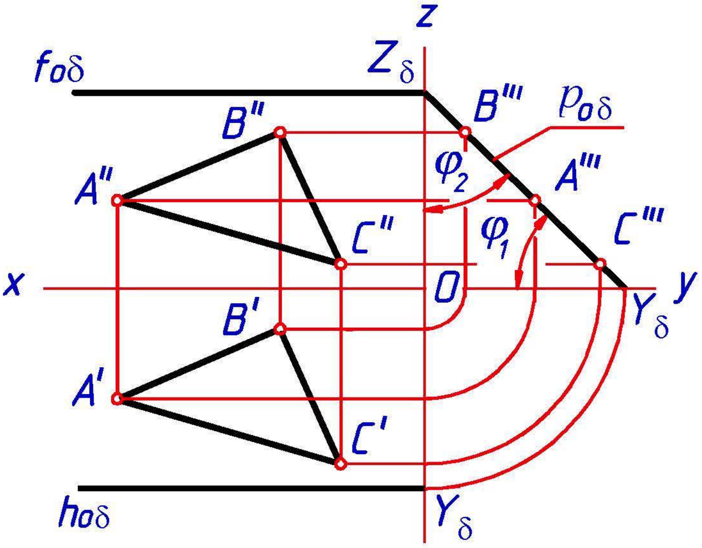


Рис. 41

3.2.2. Плоскости уровня

Характерной особенностью плоскости уровня является то, что любые геометрические фигуры, лежащие в ней, проецируются на параллельную ей плоскость проекций без искажения, а на перпендикулярные ей плоскости проекций – отрезками прямой линии.

Горизонтальная плоскость – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 42 ,43).

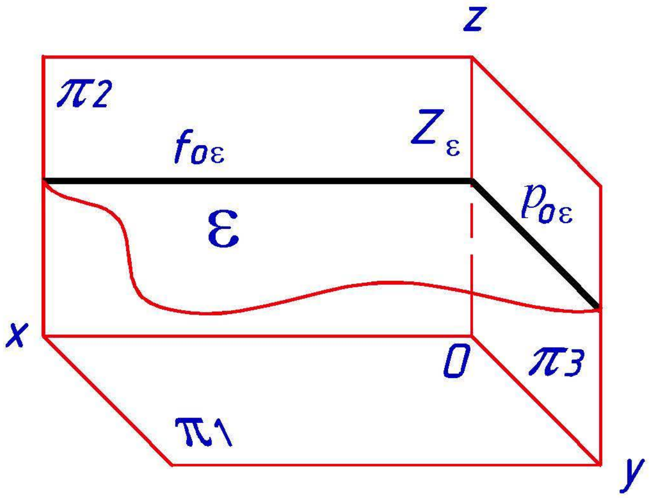


Рис. 42

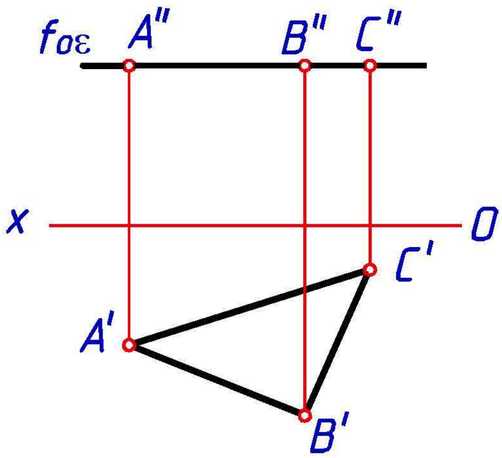


Рис. 43

Фронтальная плоскость – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 44 ,45).

Профильная плоскость – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (рис. 46,47).

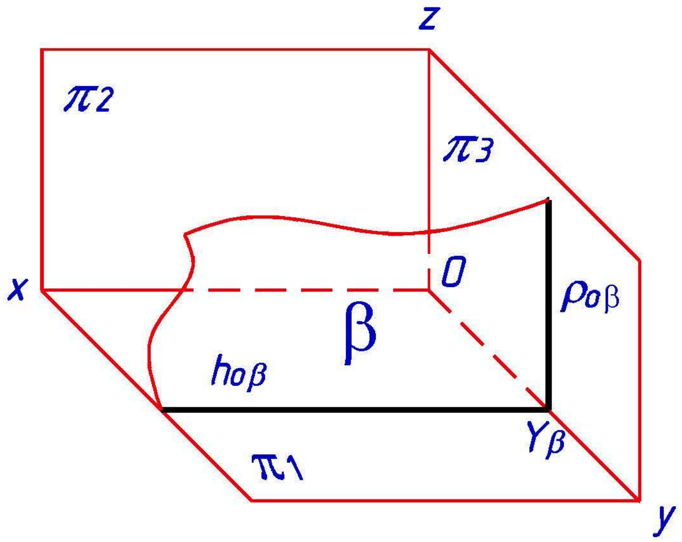


Рис. 44

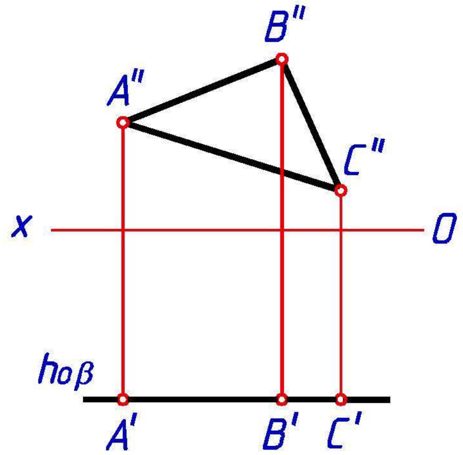


Рис. 45

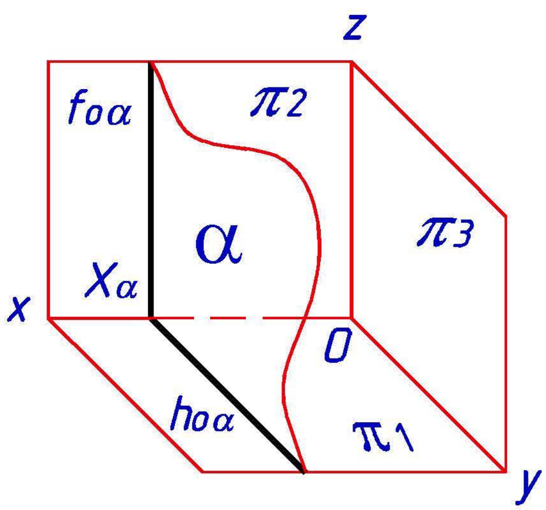


Рис. 46

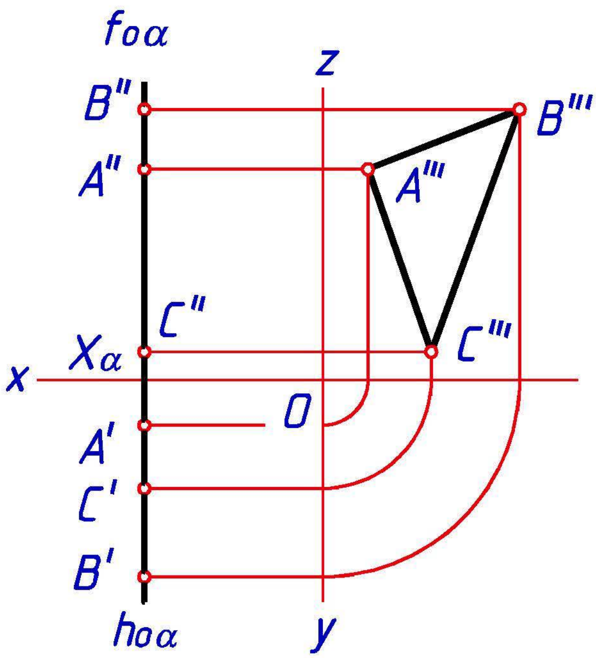


Рис. 47

3.3. Прямая и точка в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой этой плоскости. В плоскости через точку можно провести множество прямых.

Построение прямой, принадлежащей данной плоскости, основано на известных положениях геометрии:

1. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости (рис. 48).

2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, лежащей в этой плоскости или ей параллельной (рис. 49).

К главным линиям плоскости относят ее горизонтали и фронтали.

Горизонтали плоскости – прямые, лежащие в плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рис. 50).

Фронтали плоскости – прямые, лежащие в плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций (рис. 51).

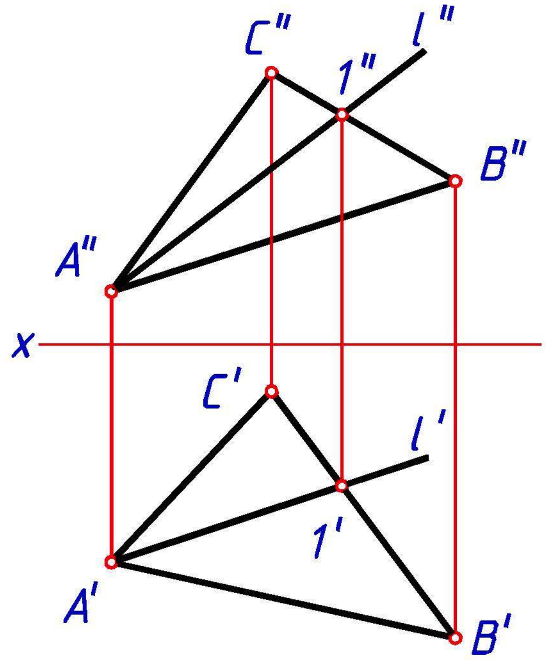


Рис. 48

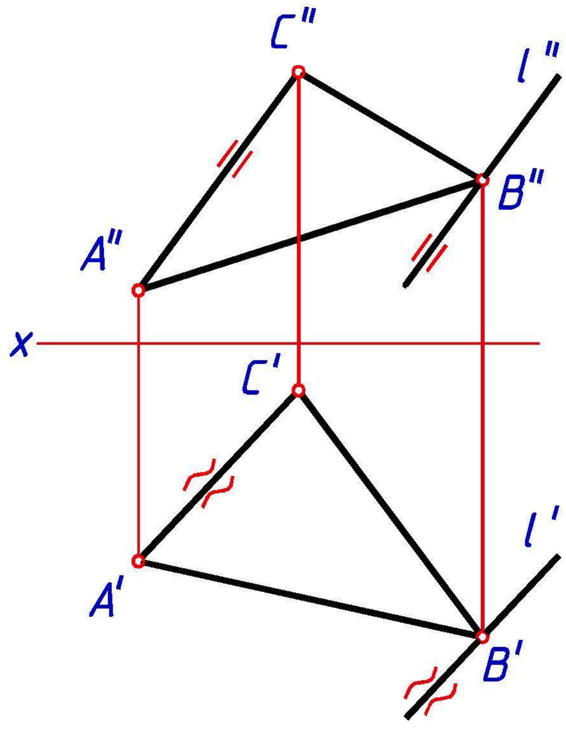


Рис. 49

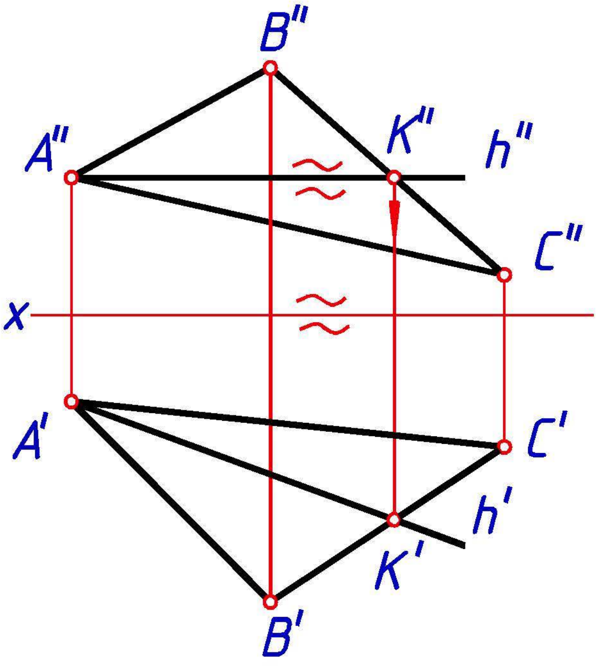


Рис. 50

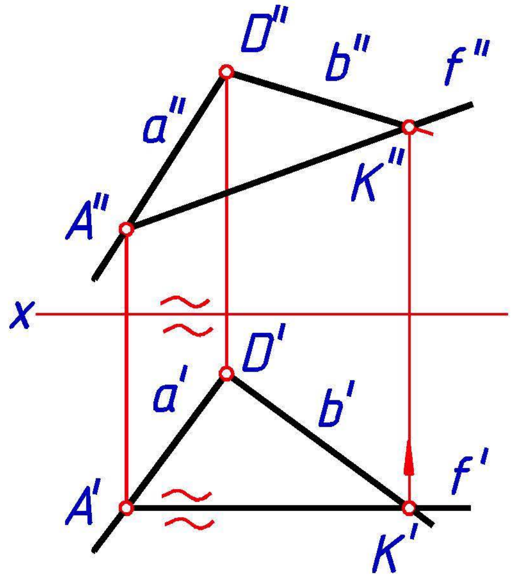


Рис. 51

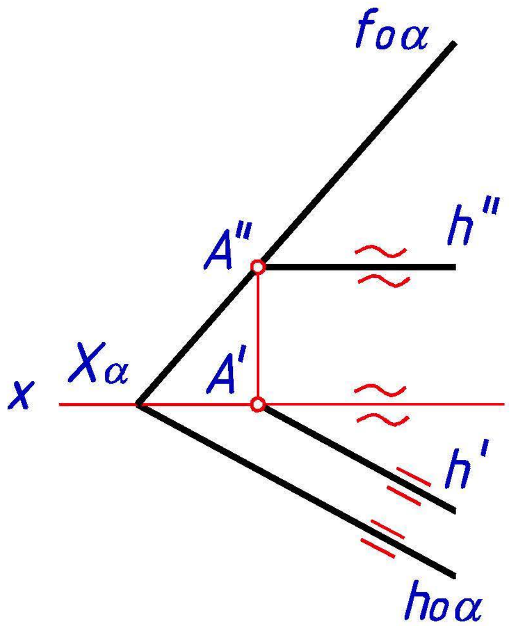


Рис. 52

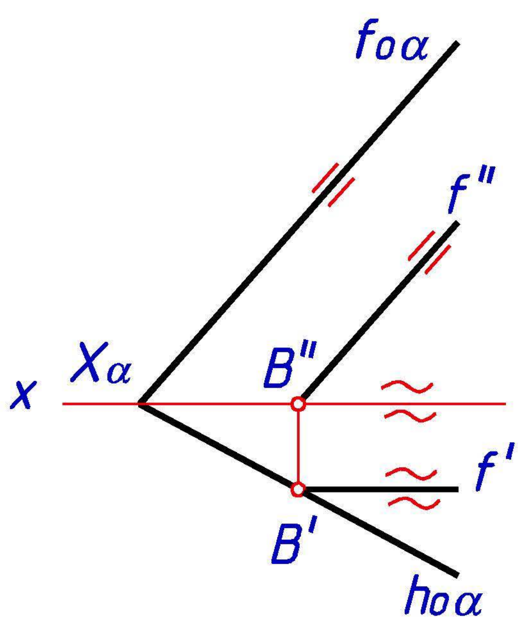


Рис. 53

При решении задач начертательной геометрии строят проекции горизонтали или фронтали заданной плоскости. Если плоскость задана не следами, то сначала строят ту проекцию её горизонтали или фронтали, направление которой известно (фронтальная проекция горизонтали и горизонтальная проекция фронтали параллельны оси X). Вторые проекции этих линий находят из условия их принадлежности заданной плоскости (рис. 50,51).

Построение горизонтали и фронтали плоскости, заданной следами показано на рис. 52,53. В этом случае известно направление обеих проекций горизонтали и фронтали.

Все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости также параллельны друг другу.

Пример 2. Построить недостающую горизонтальную проекцию точки D, принадлежащей плоскости α (рис.54).

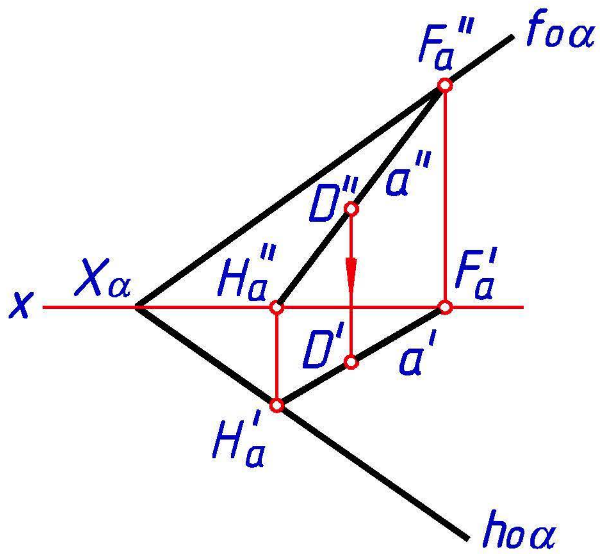


Рис. 54

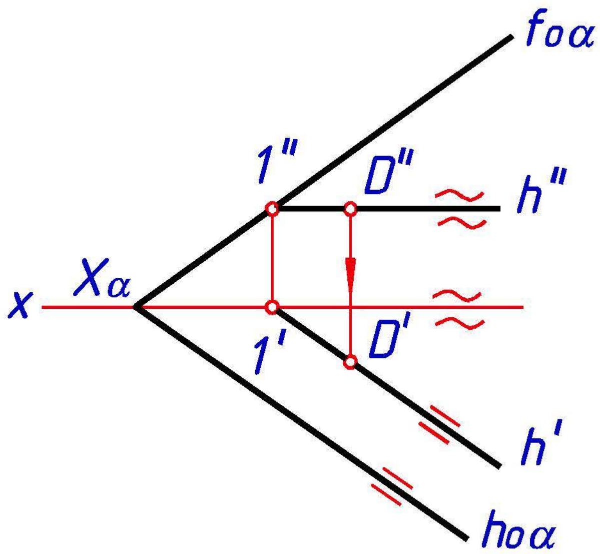


Рис. 55

Р е ш е н и е**.** Через известную проекцию D'' точки D проведем фронтальную проекцию прямой общего положения a, принадлежащей плоскости α. Горизонтальную проекцию прямой a построим, зная, что следы прямой H_a и F_a находятся на одноименных с ними следах плоскости α. Искомую горизонтальную проекцию D' точки D найдем на горизонтальной проекции прямой a.

Решение задачи упростится, если вместо прямой общего положения a использовать горизонталь или фронталь плоскости α (рис. 55).

3.4. Параллельность прямой плоскости

Прямая параллельна плоскости, если в плоскости можно провести прямую, параллельную заданной прямой.

Через точку, не принадлежащую плоскости, можно провести бесконечное множество прямых, параллельных плоскости.

Пример 3. Через точку A провести прямую общего положения a, параллельную плоскости α (рис. 56).

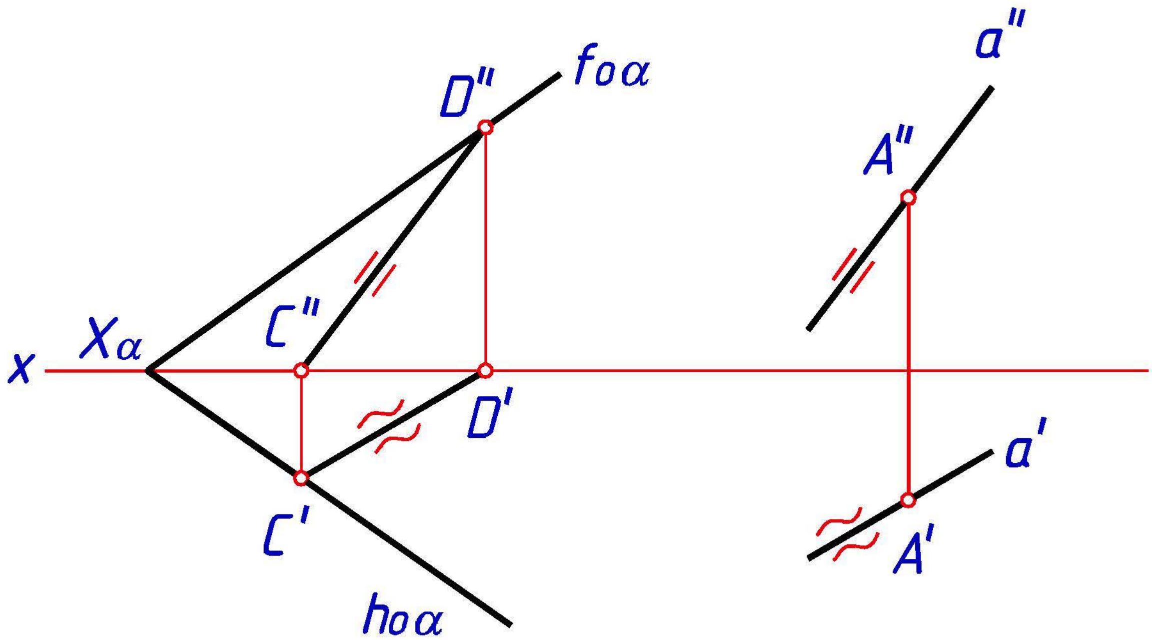


Рис. 56

Р е ш е н и е**.** Так как задача имеет множество решений, то в плоскости α строим проекции любого принадлежащего ей отрезка прямой общего положения, например ***CD.*** Искомые проекции прямой a параллельны соответствующим проекциям отрезка прямой ***CD.***

3.5. Параллельность двух плоскостей

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Если в качестве таких прямых взять следы плоскости, то признак параллельности двух плоскостей запишется: *если два пересекающихся между собой следа одной плоскости параллельны одноименным с ними следам другой плоскости, то обе плоскости параллельны между собой.*

Пример 4. Через точку $\boldsymbol{A}$ провести плоскость $\boldsymbol{\alpha}$, параллельную плоскости $\boldsymbol{\beta}$, заданной параллельными прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 57).

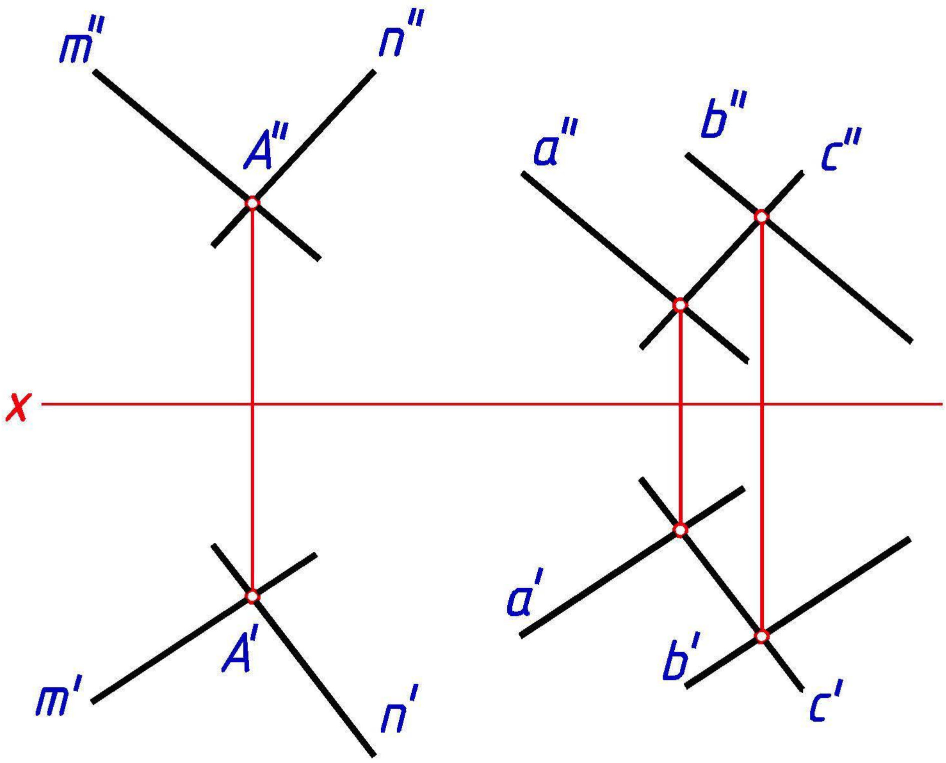


Рис. 57

Р е ш е н и е. В плоскости $\boldsymbol{\beta}$ строим любую прямую, пересекающую прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, например $\boldsymbol{c}$. Плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ зададим двумя пересекающимися в точке A прямыми m и n. Их проекции параллельны соответствующим проекциям двух пересекающихся прямых плоскости β ($m'' \parallel a''$, $m' \parallel a'$, $n'' \parallel c''$, $n' \parallel c'$).

Пример 5. Через точку A провести плоскость α, параллельную плоскости β. Искомую плоскость α задать ее следами (рис. 58).

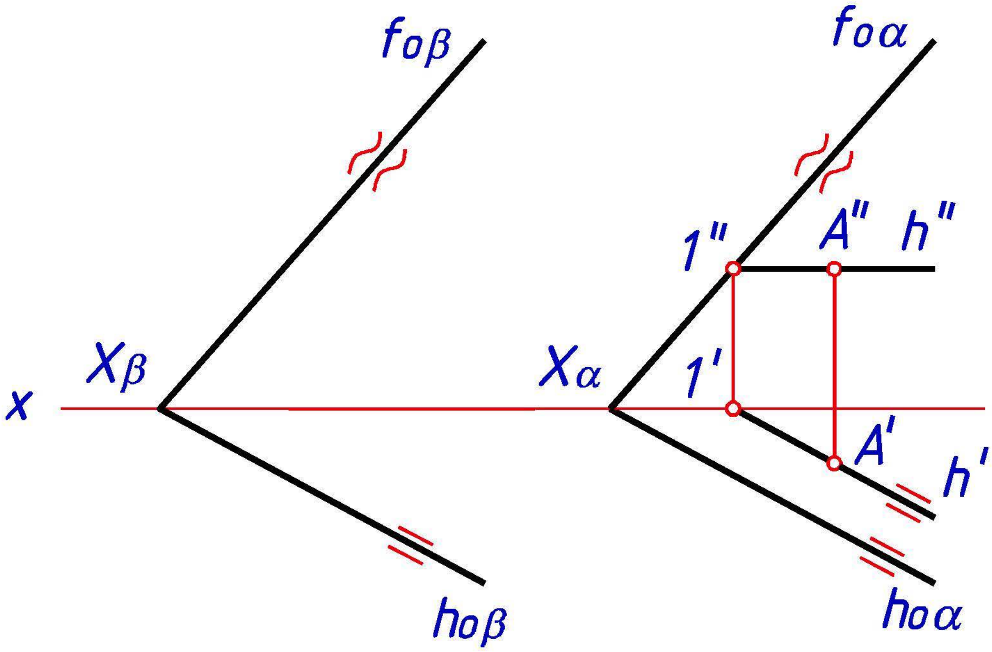


Рис. 58

Р е ш е н и е. Направление следов плоскости α известно – они параллельны соответствующим следам плоскости β. Необходимо найти точку, принадлежащую одному из следов плоскости α. Для этого через точку A удобно провести линию уровня плоскости α, например горизонталь h, и найти проекции ее фронтального следа ($1'$, $1''$).

Через фронтальную проекцию точки 1 строим фронтальный след искомой плоскости α ($f_{o\alpha} \parallel f_{o\beta}$), находим точку схода следов плоскости X_α . Через X_α строим горизонтальный след искомой плоскости α ($h_{o\alpha} \parallel h_{o\beta}$).

3.6. Перпендикулярность прямой плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Если в качестве таких прямых использовать горизонталь и фронталь плоскости, то можно воспользоваться свойством проекций прямого угла.

Все горизонтали плоскости параллельны между собой, все ее фронтали также параллельны между собой. Поэтому для определения направления, в котором проходит перпендикуляр к плоскости, можно использовать любые ее горизонтали и фронтали.

Тогда признак перпендикулярности прямой плоскости запишется: *прямая перпендикулярна плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости* (рис. 59).

Когда плоскость задана следами, очевиден следующий вывод: *если прямая перпендикулярна плоскости, то ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальному следу плоскости, а ее фронтальная проекция перпендикулярна фронтальному следу плоскости* (рис. 60).

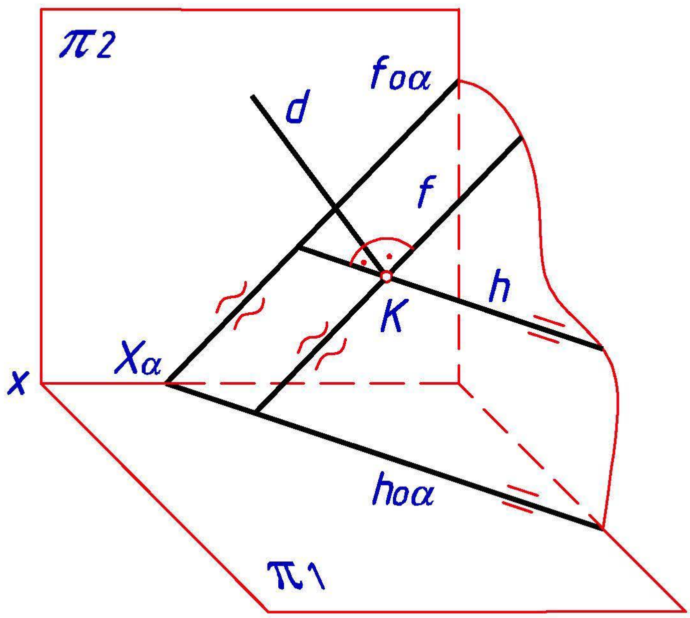


Рис. 59

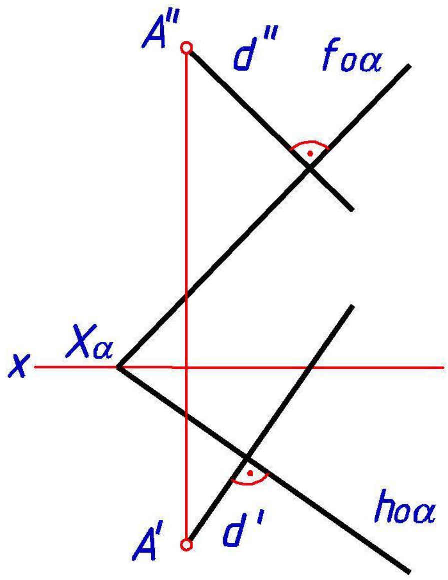


Рис. 60

Пример 6. Из точки A восставить перпендикуляр d к плоскости α (рис. 60).

Р е ш е н и е. Через проекции точки A проведем перпендикулярно соответствующим следам плоскости α проекции перпендикуляра d.

3.7. Перпендикулярность двух плоскостей

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Через перпендикуляр к плоскости можно провести множество плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости.

Пример 7. Построить плоскость α, которая проходит через прямую a и перпендикулярна плоскости β, заданной треугольником ABC (рис. 61).

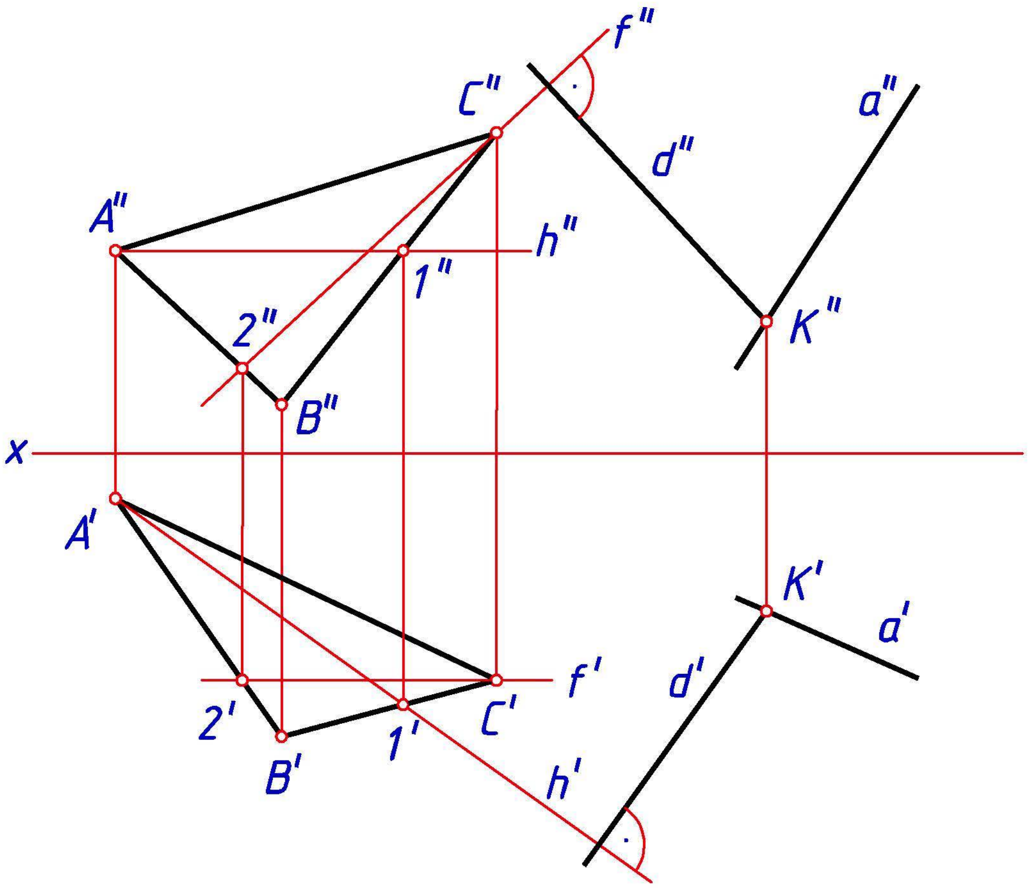


Рис. 61

Р е ш е н и е. Искомую плоскость α зададим двумя пересекающимся прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{d}$. Прямая $\boldsymbol{d}$ – перпендикуляр, восставленный из любой точки прямой $\boldsymbol{a}$, например $\boldsymbol{K}$, на плоскость α. Для определения направления проекций перпендикуляра $\boldsymbol{d}$ строим в плоскости β проекции произвольной горизонтали $\boldsymbol{h}$ и фронтали $\boldsymbol{f}$. Фронтальная проекция $\boldsymbol{d}$ перпендикулярна фронтальной проекции фронтали плоскости, горизонтальная проекция $\boldsymbol{d}$ перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости ($d' \perp h'$, $d'' \perp f''$).

3.8. Определение видимости геометрических фигур

Для увеличения наглядности чертежа невидимые линии на нем показывают штриховой линией, видимые – сплошной толстой основной линией. Видимость линии определяется видимостью принадлежащих ей точек. Закрывать точку может не только плоскость или поверхность, но и другая точка.

Для определения взаимной видимости геометрических фигур (точек, линий, плоскостей, поверхностей) используют конкурирующие точки.

Конкурирующими называют точки, принадлежащие разным геометрическим фигурам и расположенные на одной проецирующей прямой.

Пусть точки, принадлежащие разным геометрическим фигурам, расположены на общей для них проецирующей прямой. Тогда на данной плоскости проекций видимой будет проекция только той точки, которая находится ближе к наблюдателю, т.е. дальше от этой плоскости проекций. Так, видимой будет:

а) на плоскости π_1 – проекция точки, наиболее удаленной от π_1;

б) на плоскости π_2 – проекция точки, наиболее удаленной от π_2;

в) на плоскости π_3 – проекция точки, наиболее удаленной от π_3.

Возьмем на горизонтально проецирующей прямой две конкурирующие точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (рис. 62,63).

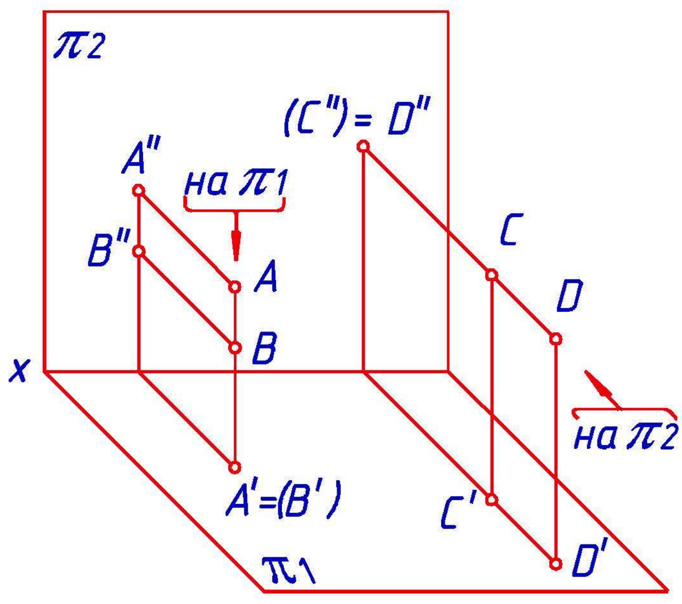


Рис. 62

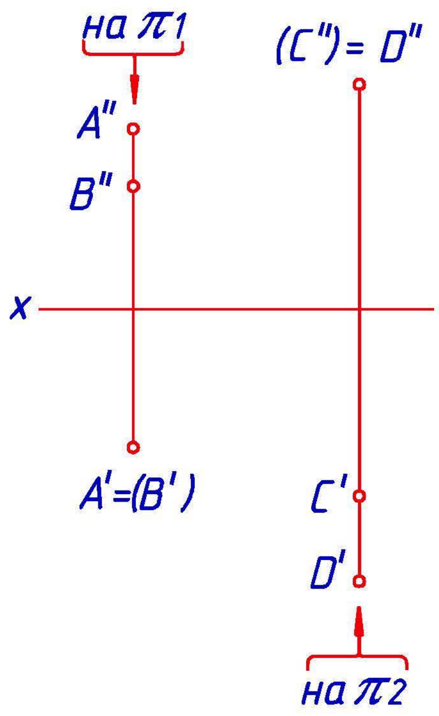


Рис. 63

На плоскости π_2 будут видимыми проекции обеих точек. На плоскости π_1 будет видимой проекция точки A, а проекция точки B – невидимой, так как точка A более удалена от π_1, чем точка B $(Z_A \triangleright Z_B)$. Невидимую проекцию точки заключаем в скобки.

На фронтально проецирующей прямой возьмем две другие конкурирующие точки C и D. Если смотреть по направлению стрелки, то на плоскости π_2 будет видимой проекция точки D, а проекция точки C – невидимой, так как точка D более удалена от π_2, чем точка C $(Y_D \triangleright Y_C)$.

Пример 8. Определить положение точки D и ее видимость относительно плоскости α, заданной треугольником ABC (рис. 64).

Р е ш е н и е. Точка D может принадлежать плоскости α или располагаться:

а) *над* или *под* плоскостью α, при этом горизонтальная проекция точки будет соответственно видимой или невидимой;

б) *перед* или *за* плоскостью α, при этом фронтальная проекция точки будет соответственно видимой или невидимой.

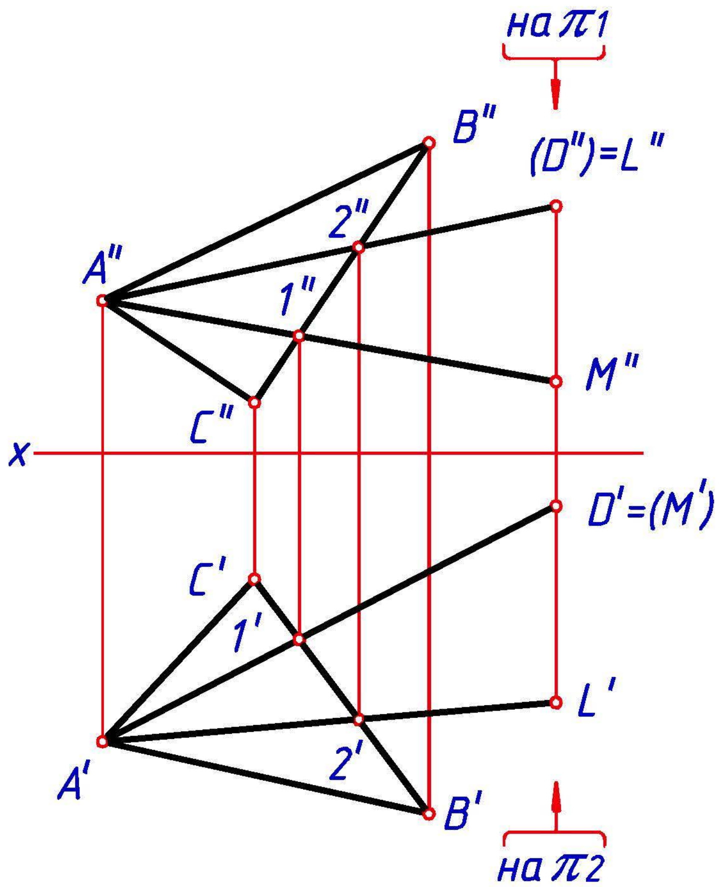


Рис. 64

Рассмотрим две пары конкурирующих точек – $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{M}x\ \alpha,\ \boldsymbol{L}x\ \alpha\ )$, расположенных соответственно на фронтально и горизонтально проецирующих прямых ($L'' = D''$, $M' = D'$).

Недостающие проекции точек $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ (L'', M') найдем из условия их принадлежности плоскости α. Точка $\boldsymbol{L}$ располагается дальше от плоскости π_2, чем точка $\boldsymbol{D}$ $(Y_L \triangleright Y_D)$. Значит, точка $\boldsymbol{D}$ находится *за* плоскостью α, ее фронтальная проекция будет невидимой.

Точка $\boldsymbol{M}$ располагается ближе к плоскости π_1, чем точка $\boldsymbol{D}$ $(Z_M \triangleleft Z_D)$. Поэтому точка $\boldsymbol{D}$ находится *над* плоскостью α, ее горизонтальная проекция будет видимой.

Контрольные вопросы

1. Где располагаются фронтальная проекция горизонтального следа и горизонтальная проекция фронтального следа плоскости?
2. Как определить, является ли плоскость, заданная в системе π_1- π_2 пересекающимися или параллельными прямыми, плоскостью общего положения или фронтально проецирующей?
3. Где располагается горизонтальная проекция любой системы точек, расположенной в горизонтально проецирующей или фронтальной плоскости?
4. Как установить видимость двух точек, принадлежащих горизонтально проецирующей прямой?
5. Как провести плоскость через прямую параллельно заданной прямой?
6. Как провести через точку плоскость, параллельную заданной плоскости?
7. Как взаимно располагаются одноименные следы двух параллельных между собой плоскостей?
8. Как располагаются проекции перпендикуляра к плоскости?
9. Как провести через прямую плоскость, перпендикулярную заданной плоскости?

ГЛАВА 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение задач начертательной геометрии значительно упрощается в случае частного положения геометрических фигур относительно плоскости проекций. Например, наиболее выгодным частным положением прямой линии и плоской фигуры следует считать:

а) положение, перпендикулярное к плоскости проекций;

б) положение, параллельное плоскости проекций.

Перевод геометрической фигуры из общего положения в частное можно осуществлять изменением взаимного положения геометрической фигуры и плоскостей проекций. Это достигается:

– перемещением в пространстве плоскостей проекций относительно неподвижной геометрической фигуры;
– перемещением в пространстве геометрической фигуры относительно неподвижных плоскостей проекций.

При решении задач начертательной геометрии используются разные способы преобразования комплексного чертежа. Из них рассмотрим способ замены плоскостей проекций и способ вращения.

4.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что одну из заданных плоскостей проекций заменяют на новую, которая в совокупности с незаменяемой плоскостью образует новую ортогональную систему плоскостей проекций. При этом положение заданных геометрических фигур в пространстве не меняется. Новую плоскость вводят так, чтобы относительно нее одна из геометрических фигур заняла частное положение.

При решении задач выполняют одну или последовательно две замены плоскостей проекций.

4.1.1. Замена одной плоскости проекций

Преобразование проекций геометрической фигуры, выполняемое способом замены плоскостей проекций, связано с преобразованием проекций принадлежащих ей точек. Поэтому рассмотрим, как изменяются проекции отдельной точки при переходе от одной системы ортогональных проекций к другой.

Пусть в системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_2$ дана точка A и указаны ее проекции A' и A'' (рис. 65). В произвольном месте введем новую плоскость проекций π_4, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций π_1 и пересекающую ее по оси X_1. В системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_4$ горизонтальная проекция точки A (A') осталась неизменной. Из рис. 65, 66 видно, что на одинаковом расстоянии от π_1 находятся точка A и ее проекции на плоскости π_2 (A'') и π_4 (A''_1) : $A A' = A''A_X = A''_1 A_{X1}$.

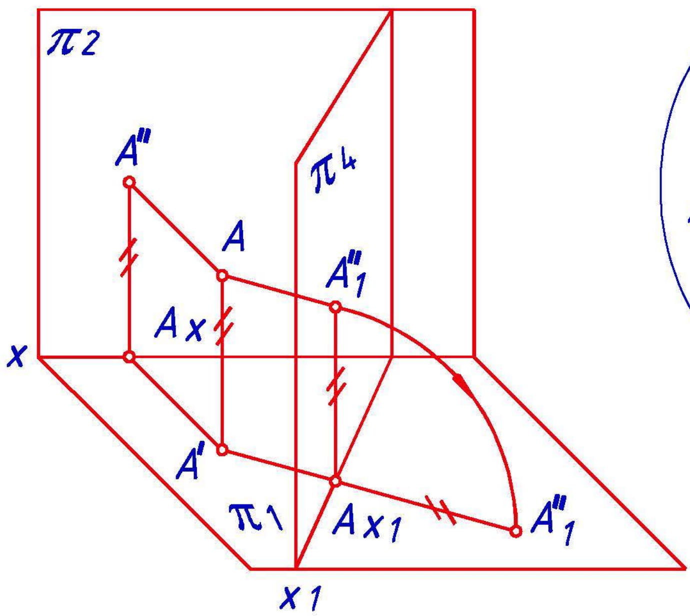


Рис. 65

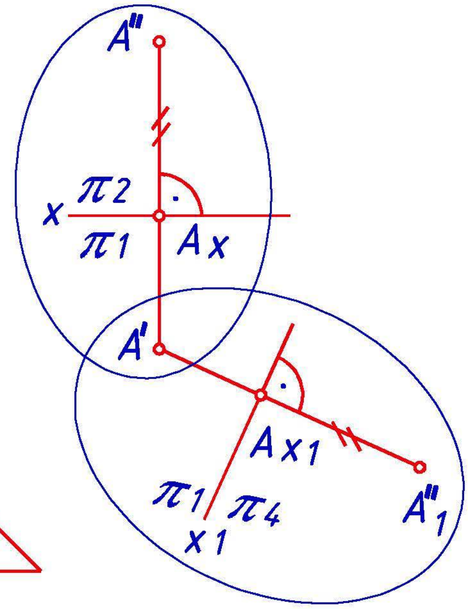


Рис. 66

Это условие позволяет просто найти фронтальную проекцию точки A''_1 в системе плоскостей $\pi_1 - \pi_4$. Для этого через горизонтальную проекцию точки A' проводим линию связи, перпендикулярную новой оси X_1, и от точки пересечения ее с осью откладываем отрезок $A''_1 A_{X1}$, равный расстоянию от проекции A'' точки до оси X (рис. 66).

Пример 1. Определить натуральную величину отрезка AB и φ – угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 67).

Р е ш е н и е. Если прямая параллельна плоскости проекций, то она проецируется на нее без искажения. Поэтому новую плоскость π_4 расположим параллельно отрезку прямой AB и перпендикулярно плоскости π_1. В системе плоскостей $\pi_1 - \pi_4$ проекция $A''_1B''_1$ определит натуральную величину отрезка AB, а угол φ – угол наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций.

Пример 2. Определить угол φ наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций (рис. 68).

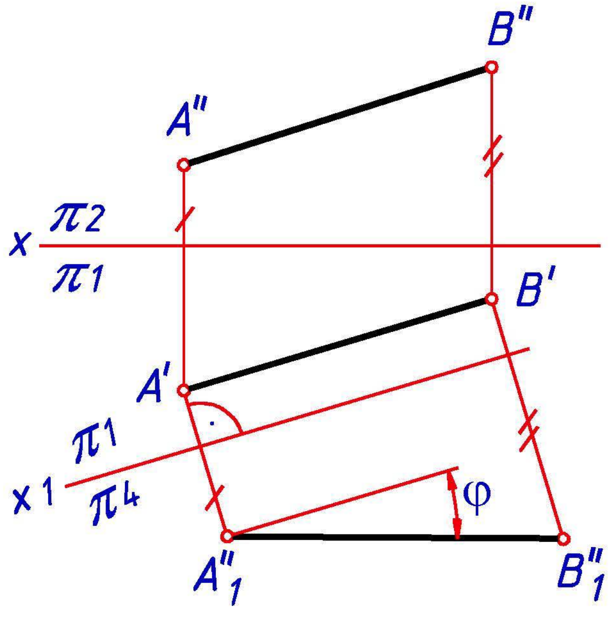


Рис. 67

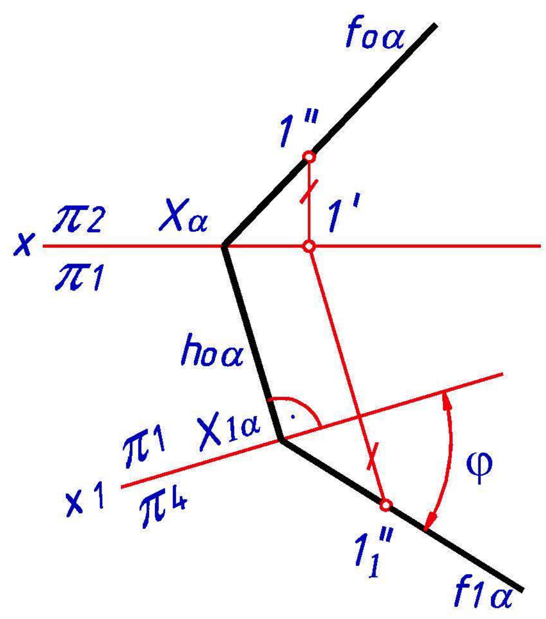


Рис. 68

Р е ш е н и е. Введем новую плоскость π_4 так, чтобы в системе плоскостей $\pi_1 - \pi_4$ плоскость α стала фронтально проецирующей.

Плоскость π_4 расположим перпендикулярно к плоскостям α и π_1. В плоскости α на ее фронтальном следе возьмем точку ***1.*** В системе плоскостей $\pi_1 - \pi_4$ сначала найдем новую фронтальную проекцию точки $1''_1$, а потом и сам след $f_{1\alpha}$. Угол φ определит угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций.

Пример 3. Построить линию пересечения отсеков плоскостей, заданных треугольниками ***ABC*** и ***DEK***. Определить видимость сторон треугольников относительно плоскостей проекций (рис. 69).

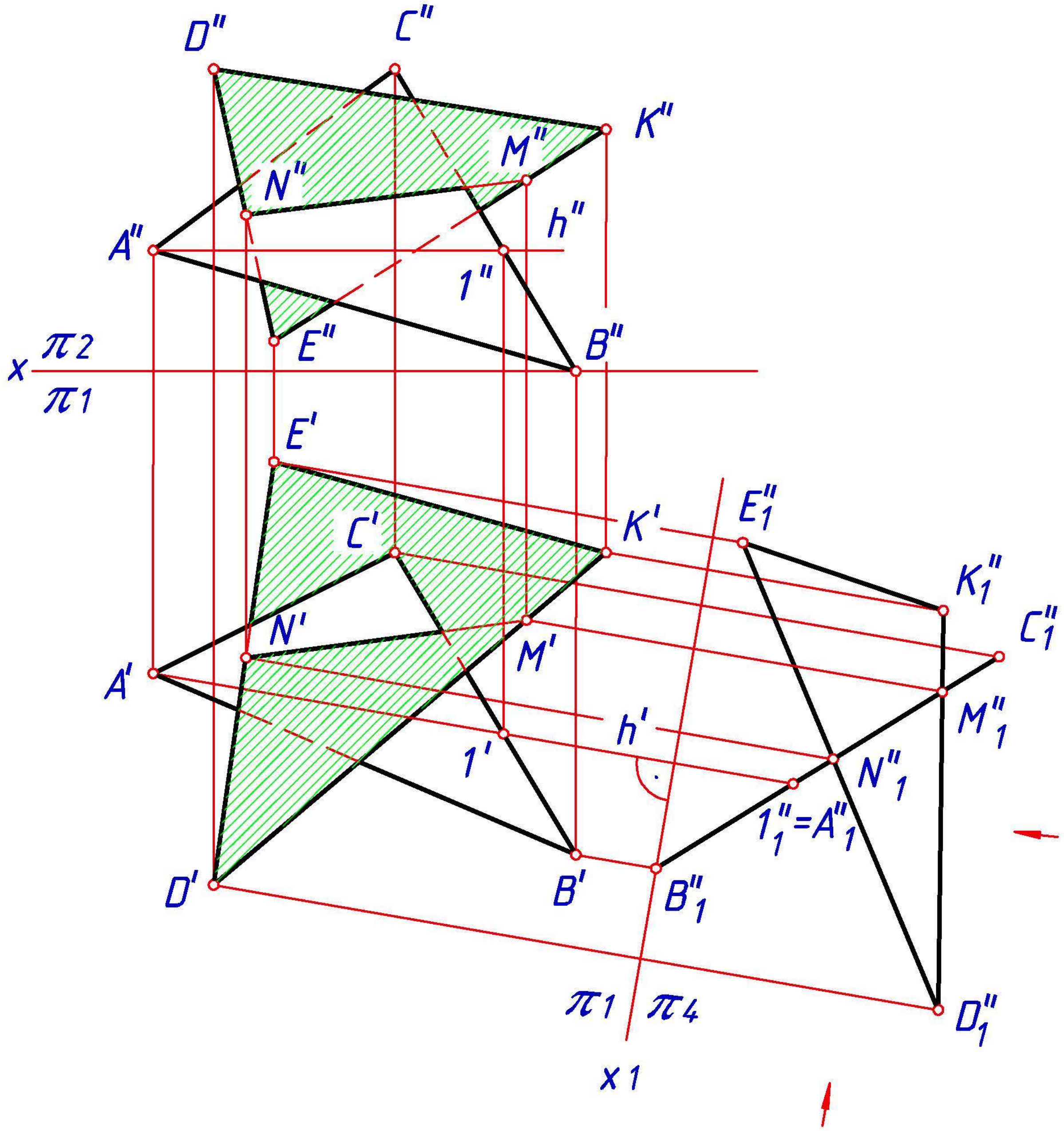


Рис.69

Р е ш е н и е. Способом замены плоскостей проекций переведем плоскость одного из треугольников, например ABC, в проецирующее положение. Для этого построим проекции ее горизонтали h и введем плоскость проекций π_4, перпендикулярную плоскости треугольника ABC и плоскости π_1. Новая ось X_1 системы плоскостей $\pi_1 - \pi_4$ перпендикулярна h' – горизонтальной проекции горизонтали плоскости треугольника ABC.

Найдем проекции двух треугольников на плоскость π_4 – $A_1''B_1''C_1''$ и $D_1''E_1''K_1''$. Проекция треугольника $A_1''B_1''C_1''$ вырождается в прямую, совпадающую с фронтальным следом его плоскости. Плоскости заданных треугольников пересекаются по прямой линии. Одна проекция этой прямой линии известна – она совпадает с фронтальным следом плоскости треугольника ABC и пересекается в точках M_1'' и N_1'' с проекциями сторон $D_1''E_1''$ и $D_1''K_1''$.

Обратными преобразованиями в системе плоскостей $\pi_1 - \pi_2$ сначала находим проекции точек M и N , а затем и линии пересечения треугольников. Видимость сторон треугольников относительно плоскостей проекций определяется с помощью конкурирующих точек или по направлению стрелок.

4.1.2. Замена двух плоскостей проекций

Изменение проекций точки A в процессе последовательной замены двух плоскостей проекций показано на рис. 70.

Сначала заменяем плоскость проекций π_2 на π_4 – образуем систему плоскостей $\pi_1 - \pi_4$, затем заменяем плоскость проекций π_1 на π_5 – образуем систему плоскостей $\pi_4 - \pi_5$. Положение осей X_1 и X_2 в данном примере выбрано произвольно.

Из анализа построений, выполненных на рис. 70 видно, что:

а) *новая плоскость проекций перпендикулярна оставшейся плоскости проекций;*

б) *расстояние от новой проекции точки до новой оси координат равно расстоянию от заменяемой проекции точки до предыдущей оси координат.*

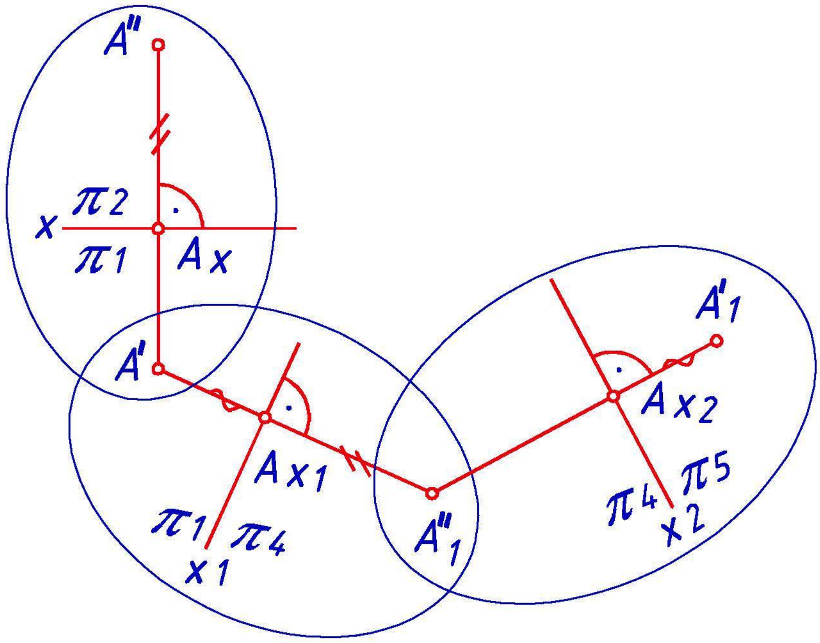


Рис.70

Пример 4. Преобразовать чертеж так, чтобы отрезок ***AB*** прямой общего положения в новой системе плоскостей проекций стал проецирующим (рис. 71).

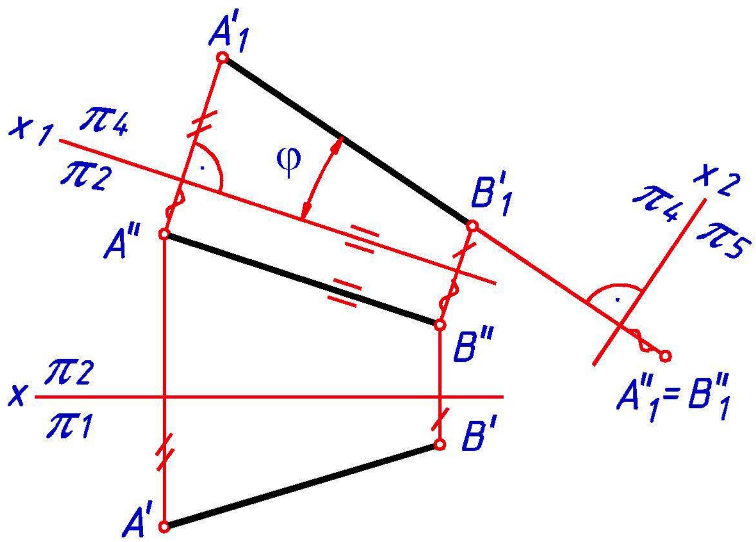


Рис. 71

Р е ш е н и е. Требуется введение двух новых плоскостей проекций: первой π_4 – параллельно отрезку AB, второй π_5 – перпендикулярно ему.

В системе плоскостей $\pi_2 - \pi_4$ отрезок AB параллелен плоскости π_4, поэтому на нее проецируется без искажения отрезок и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций.

В системе плоскостей $\pi_4 - \pi_5$ отрезок AB стал проецирующим относительно плоскости π_5.

Пример 5. Определить натуральный вид треугольника ABC (рис. 72).

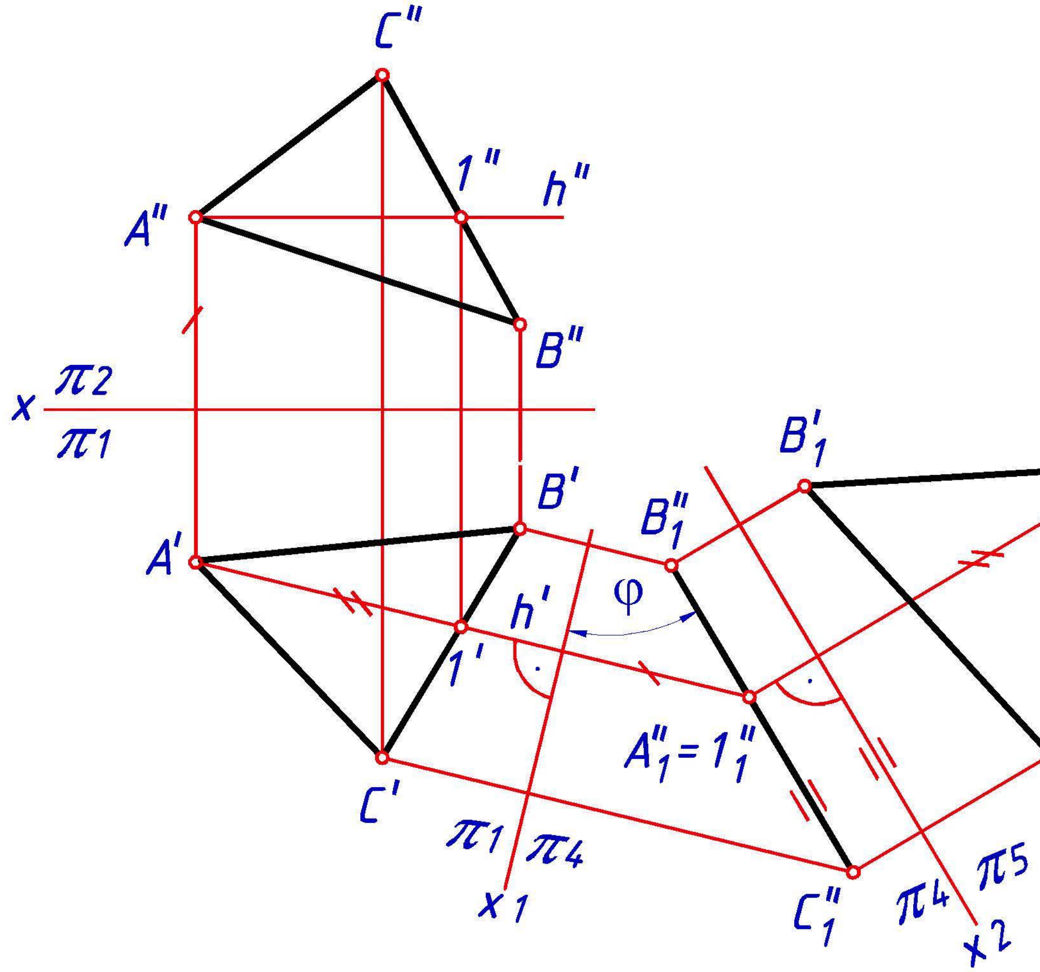


Рис. 72

Р е ш е н и е. Необходимо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость треугольника стала параллельна одной из плоскостей проекций. Тогда треугольник проецируется на нее без искажения.

Для этого необходимо последовательно сделать две замены плоскостей проекций.

Первая замена. Переведем плоскость треугольника ABC в проецирующее положение. Введем плоскость проекций π_4, перпендикулярную плоскости проекций π_1 и плоскости треугольника ABC.

Новую ось X_1 строим перпендикулярно горизонтали плоскости треугольника ABC. В системе плоскостей $\pi_1 - \pi_4$ находим проекции вершин треугольника A''_1, B''_1, C''_1 . Плоскость треугольника ABC проецируется на плоскость π_4 в виде прямой линии. Угол φ определяет угол наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций.

Вторая замена. Переведем плоскость треугольника ABC из проецирующего положения в положение плоскости уровня. Для этого введем дополнительную плоскость проекций π_5, параллельную плоскости треугольника ABC и перпендикулярную плоскости π_4.

Новую ось X_2 строим параллельно плоскости треугольника ($X_2 \parallel C''_1 B''_1$). В системе плоскостей $\pi_4 - \pi_5$ треугольник ABC проецируется на плоскость проекций π_5 в натуральную величину.

4.2. Способ вращения

В общем случае при вращении геометрической фигуры все ее точки перемещаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения. Радиус вращения любой точки равен расстоянию от этой точки до оси вращения. Центр ее вращения находится в точке пересечения оси вращения с плоскостью вращения.

Если какая-нибудь из точек данной геометрической фигуры находится на оси вращения, то при вращении фигуры эта точка не изменяет своего положения в пространстве.

4.2.1. Способ вращения вокруг линии уровня

Способ вращения вокруг линии уровня удобно использовать для определения натурального вида плоской фигуры. Сущность этого способа в том, что плоскую фигуру вращают вокруг ее линии уровня (горизонтали или фронтали) до положения, параллельного соответствующей плоскости проекций. При этом плоская фигура на эту плоскость проекций проецируется без искажения.

Пример 6. Определить натуральный вид треугольника ***ABC*** способом вращения вокруг линии уровня (рис. 73).

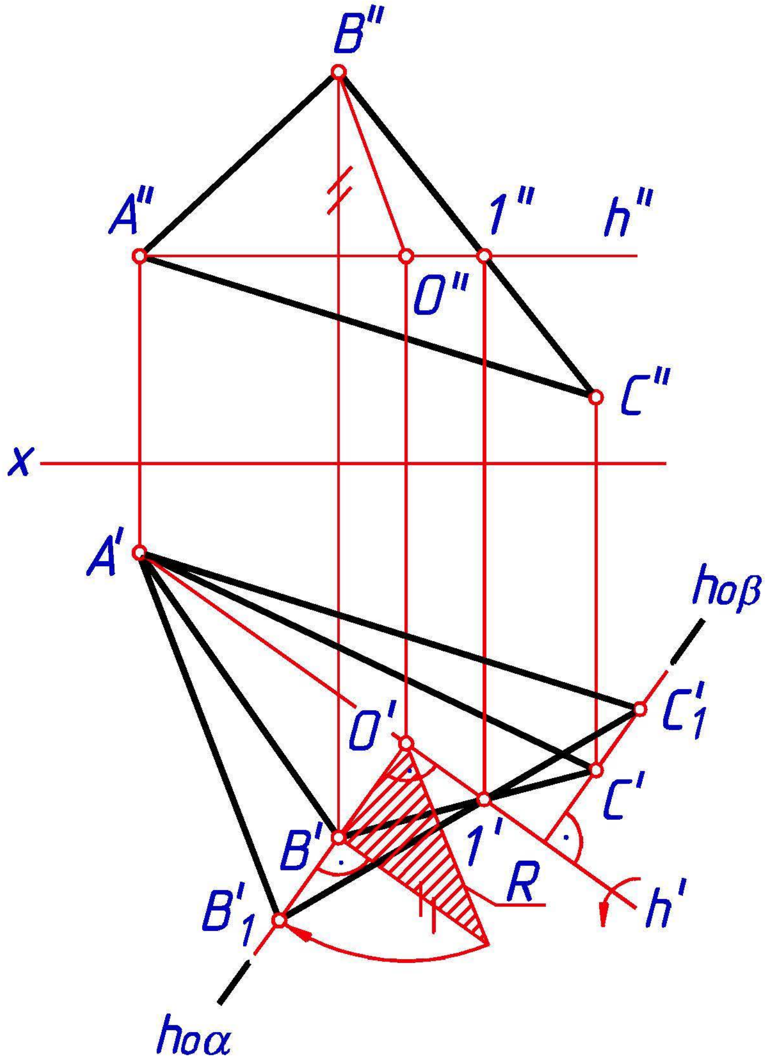


Рис. 73

Р е ш е н и е. Повернем плоскость треугольника вокруг принадлежащей ей горизонтали ***h*** так, чтобы плоскость заняла положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. В этом случае треугольник проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, на фронтальную – в виде прямой, совпадающей с проекцией горизонтали h''.

Точки A и 1 принадлежат оси вращения h, поэтому при вращении треугольника они не меняют своего положения. Точки B и C будут вращаться соответственно в горизонтально проецирующих плоскостях α и β, перпендикулярных к оси вращения h. Точку O – центр вращения точки B найдем в пересечении оси вращения h с плоскостью вращения α. Натуральную величину радиуса вращения R точки B определим способом прямоугольного треугольника.

Новую горизонтальную проекцию точки B'_1 найдем в пересечении дуги окружности радиуса R, проведенной из центра O', и горизонтального следа плоскости $h_{o\alpha}$. Точка C'_1 одновременно принадлежит и прямой $B_1'1'$ и следу плоскости $h_{o\beta}$, т.е. находится в точке их пересечения.

4.2.2. Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

При вращении геометрической фигуры вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, каждая ее точка перемещается по дуге окружности, плоскость которой является соответствующей плоскостью уровня. При этом одна проекция точки перемещается по дуге окружности, другая – по прямой, параллельной оси X.

Пример 7. Определить натуральную величину отрезка AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 74).

Р е ш е н и е. Вращая отрезок AB вокруг оси i, перпендикулярной плоскости π_1, переведем его в положение, параллельное плоскости π_2. При этом на плоскость π_2 проецируется без искажения отрезок AB и угол φ – угол наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций. Для упрощения геометрических построений ось вращения $\boldsymbol{i}$ проведем через одну из концевых точек отрезка, например через точку $\boldsymbol{A}$.

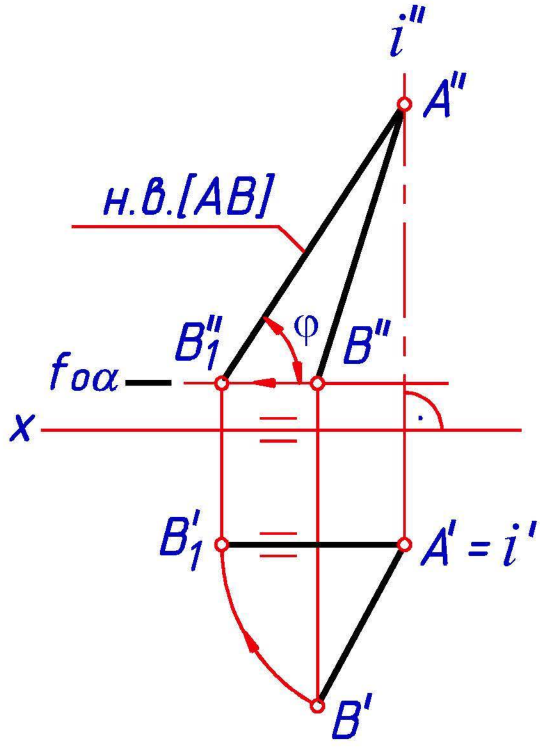


Рис. 74

При вращении отрезка $\boldsymbol{AB}$ точка $\boldsymbol{A}$ не меняет своего положения, так как принадлежит оси вращения $\boldsymbol{i}$. Точку $\boldsymbol{B}$ перемещаем по дуге окружности так, чтобы отрезок $\boldsymbol{AB}$ стал параллелен плоскости π_2. Для этого точку $\boldsymbol{B'}$ повернем вокруг оси $\boldsymbol{i'}$ так, чтобы проекция отрезка $\boldsymbol{A'B'_1}$ заняла положение, параллельное оси $\boldsymbol{X}$. Фронтальную проекцию $\boldsymbol{B''_1}$ найдем в пересечении следа f_{oa} плоскости ее вращения и линии связи, проведенной из точки $\boldsymbol{B'_1}$.

Пример 8. Вращением вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, перевести плоскость треугольника $\boldsymbol{ABC}$ во фронтально проецирующее положение (рис. 75).

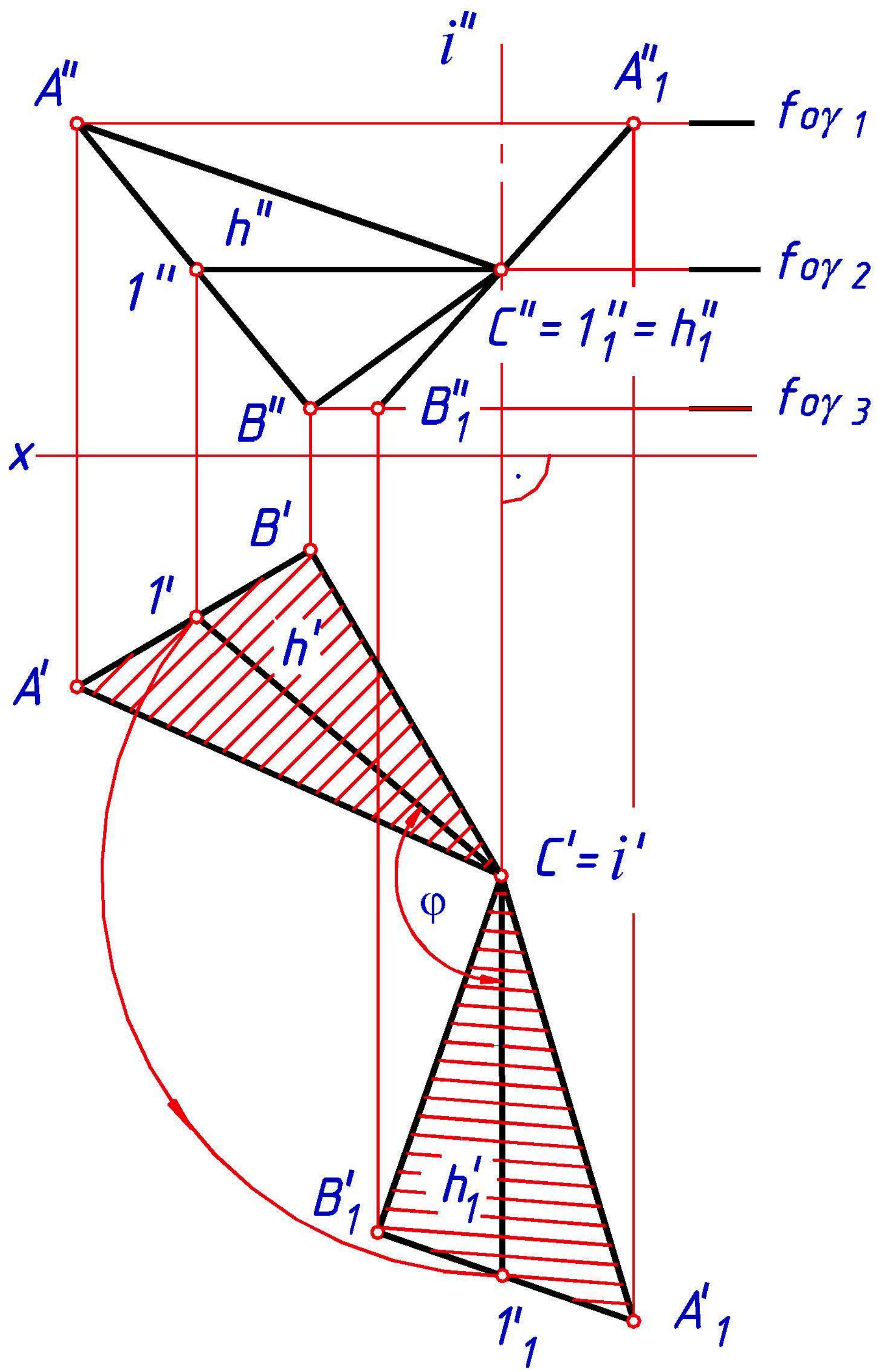


Рис. 75

Р е ш е н и е. Если плоскость треугольника ***ABC*** занимает фронтально проецирующее положение, то треугольник проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде прямой линии. Горизонталь фронтально проецирующей плоскости проецируется на плоскость $\boldsymbol{\pi_1}$ без искажения. Горизонтальная проекция горизонтали перпендикулярна к оси $\boldsymbol{X}$, а ее фронтальная проекция вырождается в точку.

В плоскости треугольника построим горизонталь $\boldsymbol{h}$ и пересекающую ее ось вращения $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\pi_1}$). Вращением на угол $\boldsymbol{\varphi}$ вокруг оси $\boldsymbol{i}$ переведем горизонталь $\boldsymbol{h}$ в положение, перпендикулярное плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$ ($\boldsymbol{h} \perp \boldsymbol{\pi_2}$). На тот же угол $\boldsymbol{\varphi}$ повернем точки $\boldsymbol{A'_1}$ и $\boldsymbol{B'_1}$. Точка $\boldsymbol{C}$ не изменяет своего положения в пространстве, так как принадлежит оси вращения. При вращении горизонтальная проекция треугольника $\boldsymbol{ABC}$ сохраняет свой вид и величину, изменяется лишь ее положение.

Фронтальную проекцию треугольника $\boldsymbol{A''_1}$ $\boldsymbol{B''_1}$ $\boldsymbol{C''}$ найдем, зная, что при вращении треугольника вокруг оси $\boldsymbol{i}$ принадлежащие ему точки вращаются в горизонтальных плоскостях уровня. Поэтому фронтальные проекции точек перемещаются по прямой, параллельной оси $\boldsymbol{X}$.

Контрольные вопросы

1. Сколько дополнительных плоскостей надо ввести в систему $\boldsymbol{\pi_1} - \boldsymbol{\pi_2}$, чтобы определить натуральный вид фигуры, плоскость которой перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ или к плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$?
2. Что служит признаком достижения плоскости фигуры горизонтального положения при выполнении преобразований комплексного чертежа?
3. В какой последовательности способом замены плоскостей проекций отрезок прямой переводится в проецирующее положение?
4. Как определяется положение центра вращения и радиуса вращения точки при ее повороте вокруг горизонтали или фронтали?
5. Как должна располагаться ось вращения при переводе плоскости фигуры из общего положения в горизонтально проецирующее?

ГЛАВА 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Задача построения линии пересечения двух плоскостей относится к позиционной.

Позиционными называются задачи, в которых требуется установить взаимное положение и взаимную принадлежность рассматриваемых геометрических фигур.

В результате решения позиционных задач определяются:

а) линии пересечения двух поверхностей;

б) точки пересечения линии и поверхности;

в) принадлежность точки поверхности.

Рассмотрим общий и частные случаи построения линии пересечения двух плоскостей

5.1. Общий случай построения линии пересечения двух плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой $\boldsymbol{l}$*, которую строят по двум принадлежащим ей точкам или по одной точке этой прямой и ее направлению.*

Для определения одной точки $\boldsymbol{L_1}$, принадлежащей прямой пересечения двух плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, используется следующий алгоритм:

1. *Ввести вспомогательную плоскость* $\boldsymbol{\gamma}$ (*обычно проецирующую или плоскость уровня). Если хотя бы одна из пересекающихся плоскостей задана следами, то в качестве вспомогательной удобно использовать плоскость уровня.*

2. *Найти прямые пересечения вспомогательной плоскости* $\boldsymbol{\gamma}$ *с каждой из заданных плоскостей.*

3. *В пересечении полученных прямых найти искомую точку* $\boldsymbol{L_1}$.

Пример. Построить линию пересечения двух плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (рис. 76). Плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ задана треугольником $\boldsymbol{ABC}$, плоскость $\boldsymbol{\beta}$ – двумя параллельными прямыми $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$.

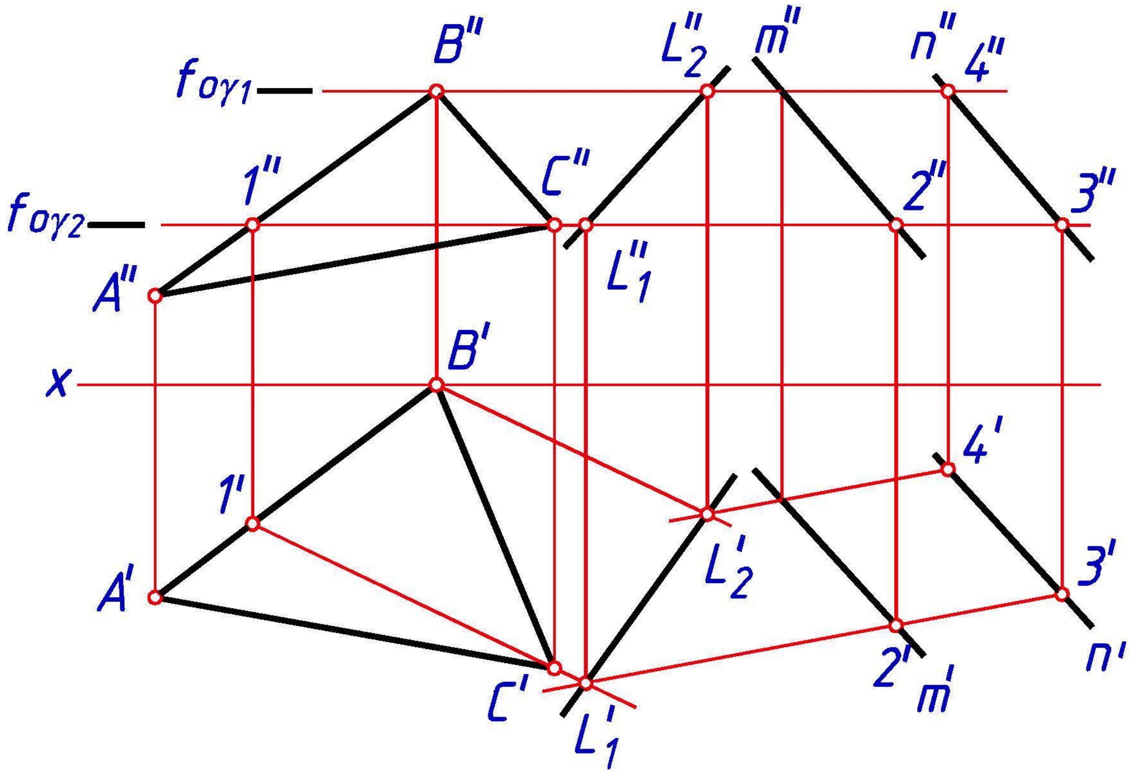


Рис. 76

Р е ш е н и е. Для определения положения точек $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$, принадлежащих прямой пересечения, возьмем две вспомогательные горизонтальные плоскости γ_1 и γ_2. Плоскость γ_1 пересечет заданные плоскости по прямым с проекциями $1''C''$, $1'C'$ и $2''3''$, $2'3'$. В пересечении горизонтальных проекций этих прямых определяем горизонтальную проекцию точки $\boldsymbol{L_1}$. Фронтальную проекцию точки $\boldsymbol{L_1}$ находим по линии связи на фронтальном следе вспомогательной плоскости γ_1.

Для определения точки $\boldsymbol{L_2}$ используем плоскость γ_2 . При построении горизонтальных проекций прямых пересечения плоскости γ_2 с плоскостями α и β использованы только точки B' и $4'$. Направление проходящих через них проекций прямых известно, так как вспомогательные плоскости γ_1 и γ_2 взаимно параллельны [1].

[1] Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

5.2. Частные случаи построения линии пересечения двух плоскостей

Рассмотрим частные случаи построения линии пересечения двух плоскостей:

1. *Если следы двух плоскостей пересекаются, то прямая их пересечения проходит через точки пересечения одноименных следов плоскостей* (рис. 77,78).

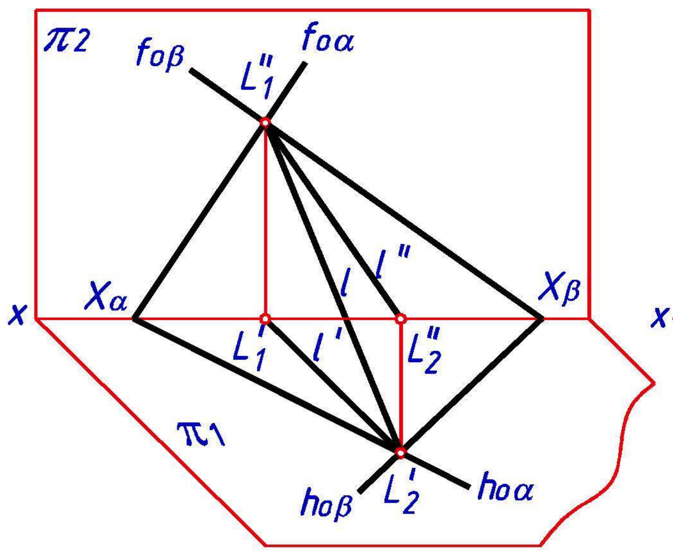


Рис. 77

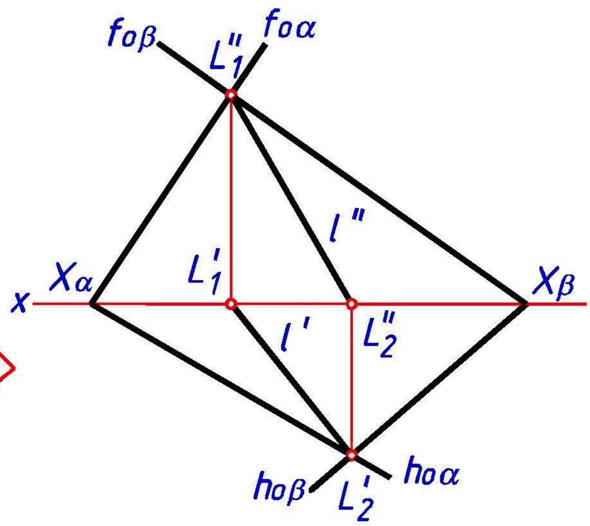


Рис. 78

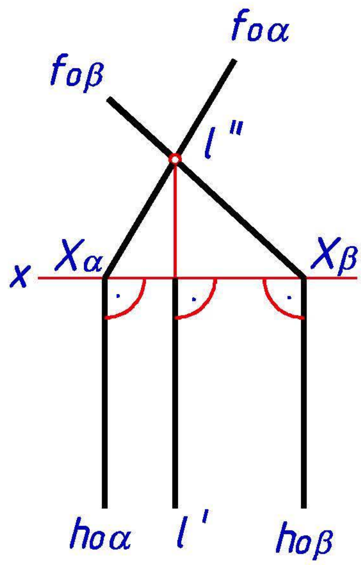


Рис. 79

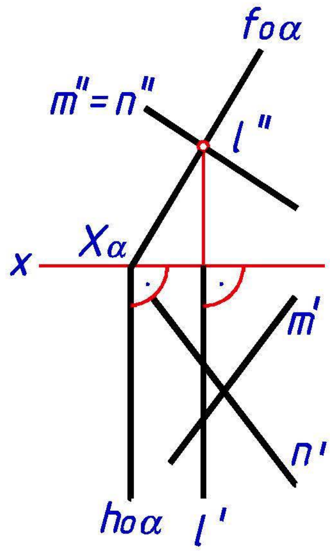


Рис. 80

2. *Если обе плоскости перпендикулярны одной и той же плоскости проекций, то прямая их пересечения перпендикулярна этой плоскости проекций* (рис. 79,80).

3. *Если плоскости* α *и* β *проецирующие, то проекции прямой их пересечения будут находиться на соответствующих следах этих плоскостей* (рис. 81,82).

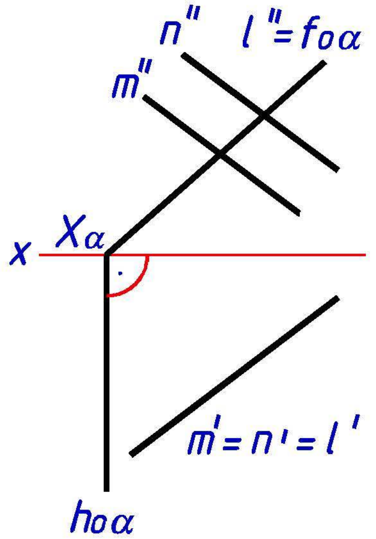


Рис.81

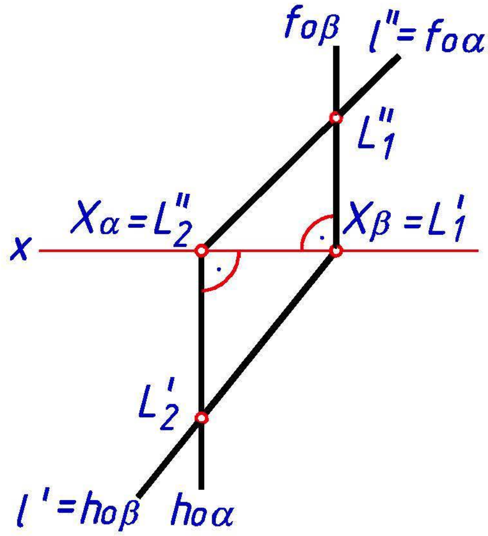


Рис.82

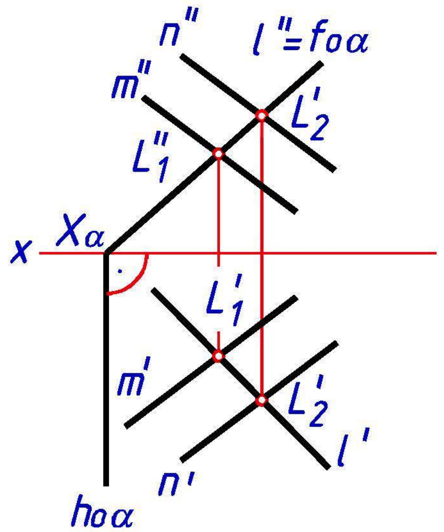


Рис.83

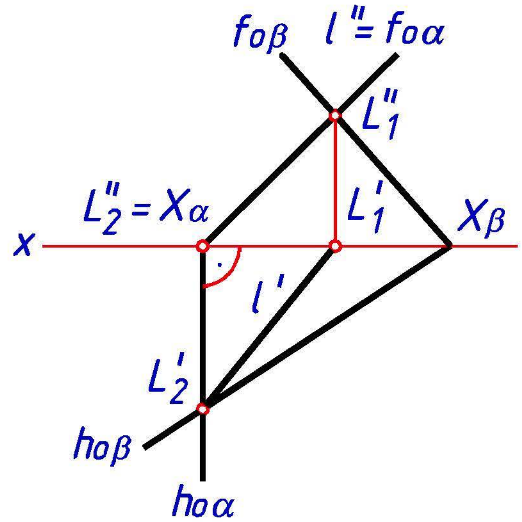


Рис.84

4. *Если одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, а другая – плоскость общего положения, то одна проекция линии пересечения совпадает с соответствующим следом этой плоскости, а вторая строится из условия принадлежности линии пересечения второй плоскости* (рис. 83,84).

5. *Если одна из пересекающихся плоскостей – плоскость уровня, то линия их пересечения – соответствующая линия уровня* (рис. 85,86).

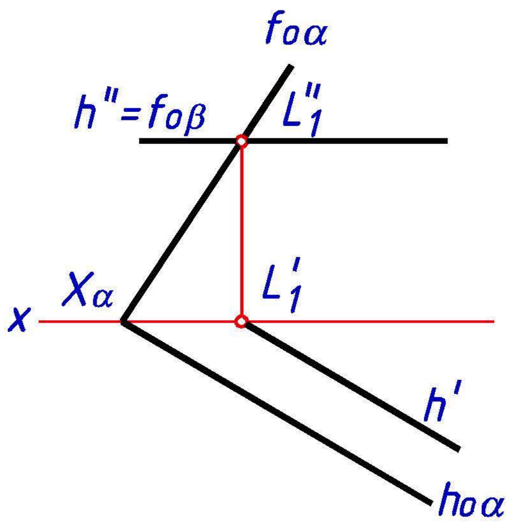


Рис. 85

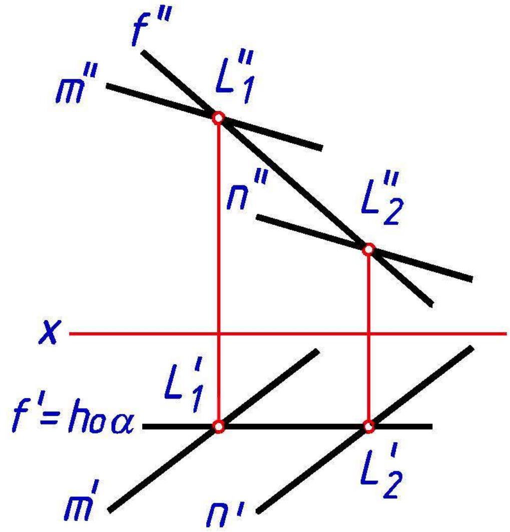


Рис. 86

Контрольные вопросы

1. Служит ли признаком взаимного пересечения двух плоскостей пересечение хотя бы одной пары их одноименных следов?

2. Как строится линия пересечения двух плоскостей, из которых хотя бы одна перпендикулярна к плоскости π_1 или к плоскости π_2?

3. Как строится линия пересечения двух плоскостей, из которых хотя бы одна параллельна плоскости π_1 или плоскости π_2?

4. В чем заключается общий способ построения линии пересечения двух плоскостей?

5. Как определить "видимость" в случае взаимного пересечения плоскостей?

ГЛАВА 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Прямая пересекает плоскость, если она не принадлежит плоскости и ей не параллельна. Проекции точки пересечения делят соответствующие проекции прямой на два участка, видимость которых относительно плоскости определяется с помощью конкурирующих точек.

6.1. Общий случай пересечения прямой с плоскостью

Если прямая ***a*** и плоскость **α** занимают общее положение, то алгоритм построения точки их пересечения ***K*** запишется:

*1. Прямую **a** заключить во вспомогательную проецирующую плоскость **γ*** (рис. 87).

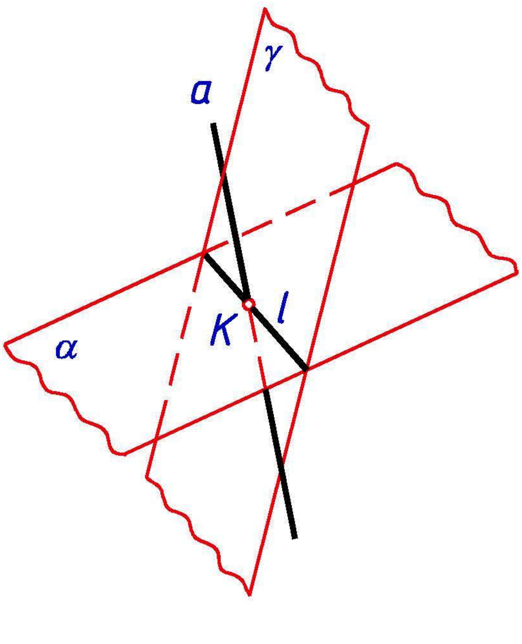


Рис. 87

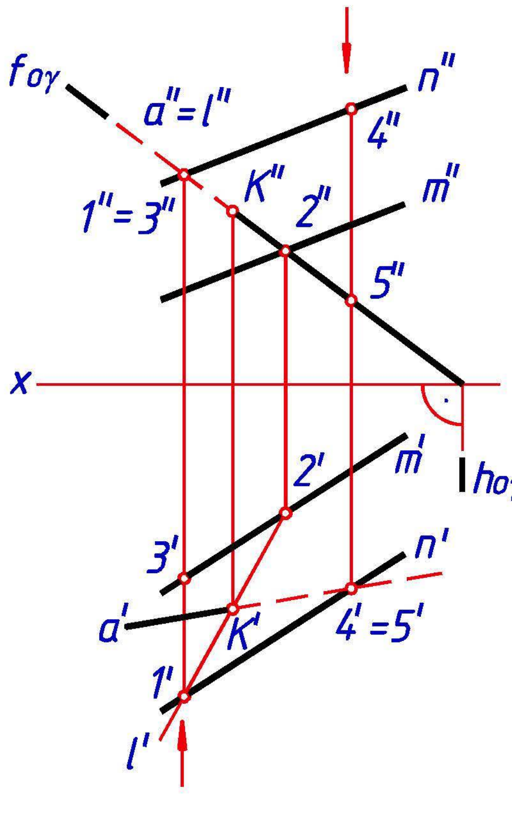


Рис.88

*2. Найти прямую **l** пересечения вспомогательной и заданной плоскостей.*

*3. В пересечении полученной и заданной прямых найти искомую точку **K**.*

Пример. Найти точку пересечения K прямой a с плоскостью $\alpha(m, n)$, определить видимость прямой относительно плоскости α (рис. 88).

Р е ш е н и е. Заключим прямую a во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость γ. Найдем прямую пересечения l заданной плоскости и вспомогательной. Ее фронтальная проекция l'' известна – она совпадает с фронтальным следом $f_{0\gamma}$ вспомогательной плоскости. Горизонтальную проекцию l' построим из условия принадлежности прямой l плоскости α. Для этого по известным фронтальным проекциям точек 1 и 2 пересечения прямых m, n плоскости α с прямой l найдем их горизонтальные проекции. В пересечении l' и a' сначала найдем K', затем по линии связи на l'' найдем K''.

Определение видимости прямой a относительно плоскости α выполним в следующей последовательности:

1) в плоскости α и на прямой a возьмем соответственно конкурирующие точки 1 и 3. Эти точки находятся на фронтально проецирующем луче $1\ 3$, поэтому их фронтальные проекции совпадают ($1'' = 3''$). Точка 1, принадлежащая плоскости α, более удалена от фронтальной плоскости проекций, чем точка 3, принадлежащая прямой a ($Y_1 > Y_3$). Поэтому участок прямой a, расположенный левее точки K находится за плоскостью α – будет невидим. На фронтальной проекции прямой a этот ее участок отмечаем штриховой линией;

2) в плоскости α и на прямой a возьмем соответственно другую пару конкурирующих точек – 4 и 5. Эти точки находятся на горизонтально проецирующем луче $4\ 5$, поэтому их горизонтальные проекции совпадают ($4' = 5'$). Точка 4, принадлежащая плоскости α, более удалена от горизонтальной плоскости проекций, чем точка 5,

принадлежащая прямой ***a*** ($Z_4 > Z_5$). Из этого следует, что участок прямой ***a***, расположенный правее точки ***K*** находится под плоскостью **α** – будет невидим. На горизонтальной проекции прямой ***a*** этот ее участок отмечаем штриховой линией.

6.2. Частные случаи пересечения прямой с плоскостью

Рассмотрим частные случаи пересечения прямой с плоскостью:

1. *Плоскость проецирующая, прямая общего положения.*

Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций, проецируется на нее в виде прямой линии (рис. 89, 90).

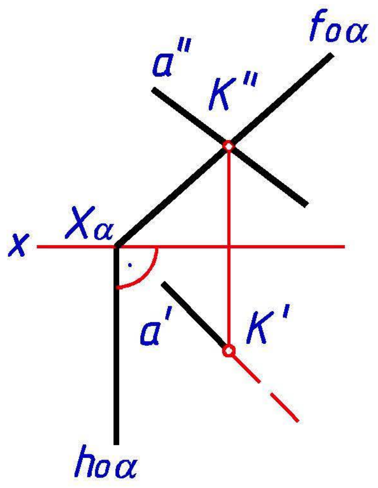


Рис. 89

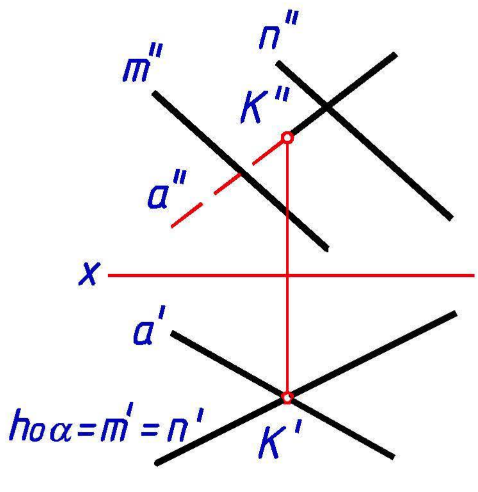


Рис. 90

В пересечении этой прямой (проекции плоскости) и соответствующей проекции прямой ***a*** определится одна проекция точки ***K*** пересечения прямой ***a*** с плоскостью **α**.

Другая проекция точки ***K*** находится из условия ее принадлежности заданной прямой ***a***.

2. Плоскость общего положения, прямая – проецирующая.

Так как прямая ***a*** – проецирующая (рис. 91,92), то на соответствующую плоскость проекций она проецируется в виде точки, с которой совпадает одна проекция точки ***K*** – точки пересечения прямой с плоскостью. Другую проекцию ***K*** найдем из условия принадлежности точки ***K*** плоскости **α** (точка ***K*** принадлежит плоскости **α**, так как она принадлежит прямой ***l*** плоскости **α** *)*.

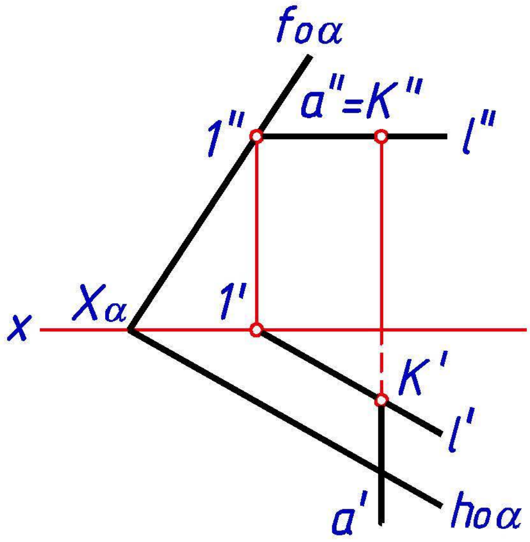


Рис. 91

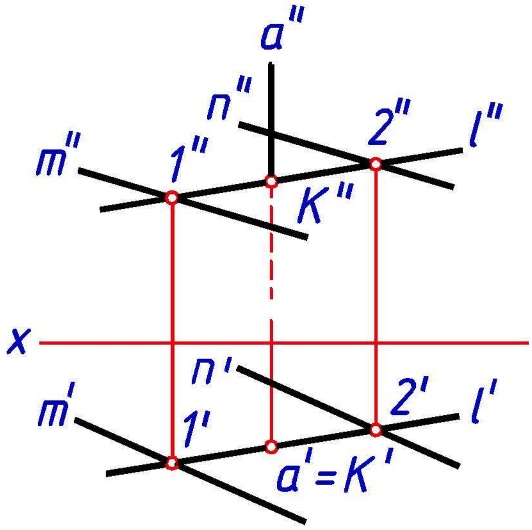


Рис.92

Контрольные вопросы

1. В чем в общем случае заключается способ построения точки пересечения прямой с плоскостью ?
2. Как определить "видимость" при пересечении прямой с плоскостью?
3. Как строится точка пересечения проецирующей прямой с плоскостью?
4. Как строится точка пересечения прямой с проецирующей плоскостью?

ГЛАВА 7. МНОГОГРАННИКИ

Многогранником называют пространственную фигуру, ограниченную замкнутой поверхностью, которая состоит из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников.

7.1. Построение сечения многогранника плоскостью

Сечением многогранника плоскостью в общем случае является плоский многоугольник. Число его сторон равно числу граней многогранника, пересекаемых секущей плоскостью. Для построения многоугольника сечения обычно используют способ граней или способ ребер.

Способом граней находят прямые пересечения каждой грани многогранника с секущей плоскостью, т.е. находят стороны сечения. Пересечение сторон определяет вершины многоугольника сечения.

Способом ребер находят точки пересечения каждого ребра многогранника с секущей плоскостью, т.е. находят вершины многоугольника сечения. Соединяя вершины, получают многоугольник сечения.

Пример 1. Построить сечение пирамиды плоскостью α (рис. 93).

Р е ш е н и е. Для определения вершин K и L треугольника сечения используем способ ребер. В этом случае решение сводится к нахождению точек пересечения ребер SA и SB с плоскостью α, т.е. к задаче на определение точки пересечения прямой с плоскостью.

Для определения точки K, в которой ребро SA пересекает плоскость α, выполним следующие действия:

1) заключим ребро SA во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость γ_1;

2) найдем прямую 12 пересечения плоскостей γ_1 и α;

3) в пересечении прямых SA и 12 найдем точку K.

Аналогичным образом найдем точку L. Для этого заключим ребро SB во вспомогательную фронтально проецирующую плоскость γ_2.

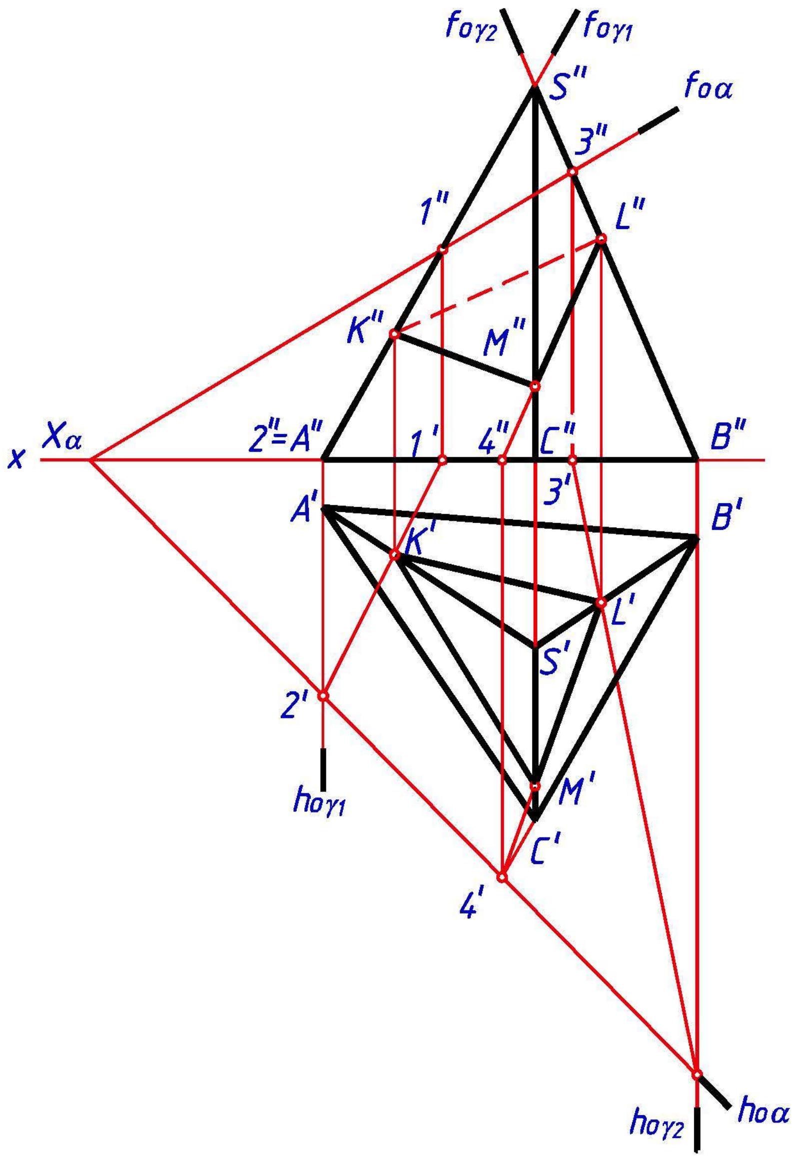


Рис.93

Ребро ***SC*** занимает частное положение относительно плоскостей проекций (***SC*** $\parallel$ π_3), поэтому принадлежащую ему вершину ***M*** треугольника сечения найдем иным, чем вершины ***K*** и ***L***, способом. Точка ***L*** принадлежит прямой пересечения плоскости α с гранью ***SCB.*** Эта прямая является геометрическим местом точек пересечения с плоскостью α прямых, принадлежащих грани ***SCB***. Найдем точку ***4*** пересечения плоскости α со стороной ***CB*** основания пирамиды. Плоскость α пересекает грань ***SCB*** по прямой, проходящей через точку ***L*** и найденную точку ***4***. Точка ***M*** получится в пересечении этой прямой с ребром ***SC.***

Решение задачи на построение сечения многогранника плоскостью упрощается, если преобразовать чертеж так, чтобы в новой системе плоскостей проекций секущая плоскость заняла проецирующее положение (рис. 94).

Тогда одна проекция многоугольника сечения известна – она совпадает с соответствующим следом секущей плоскости. Другие его проекции находят из условия принадлежности вершин многоугольника сечения ребрам многогранника.

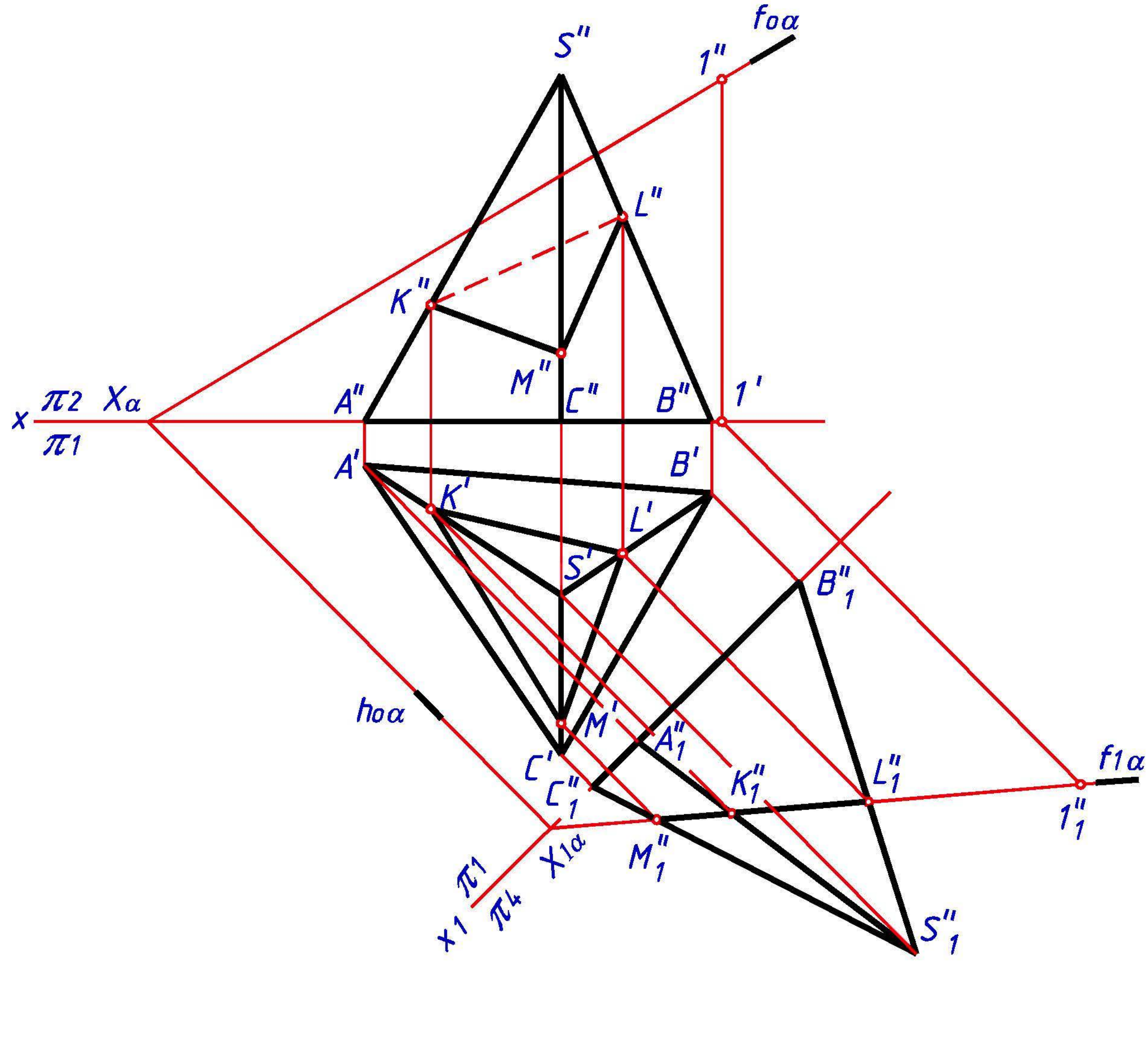


Рис. 94

Чертежи на рис. 93, 94 выполнены согласно условию, что плоскость α прозрачна. При определении видимости сторон многоугольника сечения следует иметь в виду очевидное правило: точка и линия, принадлежащие поверхности многогранника, видимы только в том случае, если они расположены на видимой грани.

7.2. Развертка поверхности многогранника

Построение развертки многогранника сводится к построению натуральных величин его граней.

Развертку многогранной поверхности можно выполнить тремя способами: а) треугольников (триангуляции); б) нормального сечения; в) раскатки.

Рассмотрим наиболее универсальный из них – способ треугольников. Этот способ используется для построения разверток любых многогранных поверхностей, а также для построения приближенных и условных разверток кривых поверхностей. Способ основан на свойстве «жесткости» треугольника – три отрезка определяют единственный треугольник.

Развертка многогранника способом треугольников строится в следующей последовательности:

1) те грани многогранника, у которых число сторон больше трех разбиваются на треугольники;

2) определяются натуральные величины сторон треугольников;

3) на плоскости последовательно строятся треугольники, из которых состоят грани многогранника.

Пример 2. Построить развертку поверхности трехгранной пирамиды ***SABC*** (рис.95).

Р е ш е н и е. Так как основание ***ABC*** пирамиды лежит в горизонтальной плоскости проекций π_1, то оно проецируется на π_1 в натуральную величину.

Натуральные величины ребер ***SA, SB, SC*** определяем способом вращения вокруг оси ***i***, перпендикулярной плоскости π_1 и проходящей через вершину ***S.***

Для построения развертки поверхности пирамиды сначала на свободном поле чертежа откладываем ребро ***SA*** и с помощью засечек строим треугольник ***SAB,*** затем к нему последовательно пристраиваем треугольники ***SBC***, ***SAC***, ***ABC***.

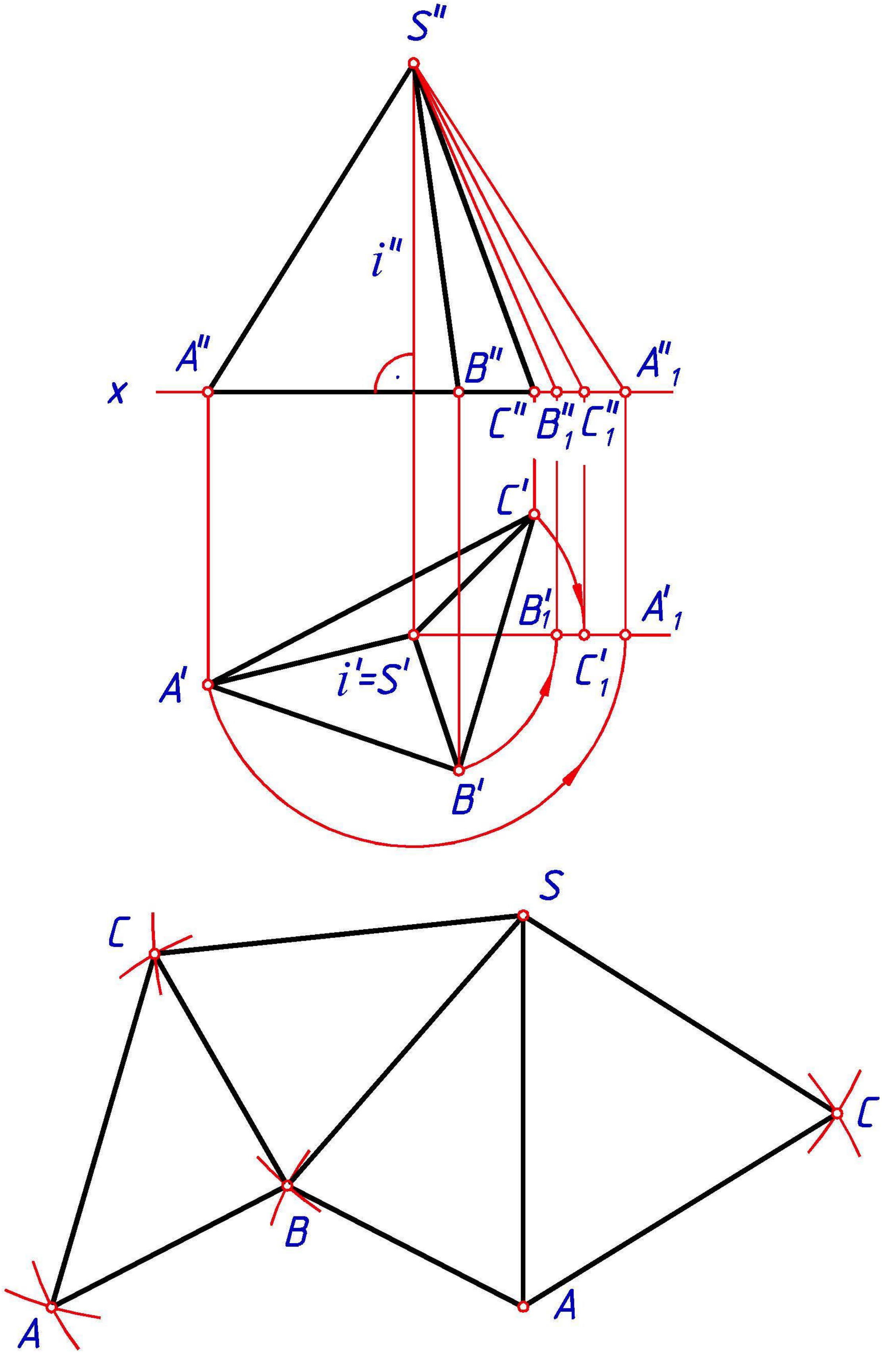


Рис.95

Контрольные вопросы

1. Чем задается поверхность пирамиды на чертеже?
2. Какая фигура получается в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды?
3. В каком случае в сечении трехгранной пирамиды плоскостью получается четырехугольник?
4. В чем заключается сущность способа ребер?
5. В чем заключается сущность способа граней?
6. В какой последовательности строится развертка пирамиды способом триангуляции?
7. Какими способами можно определить натуральную величину ребра пирамиды?

ГЛАВА 8. ПОВЕРХНОСТЬ

Многое, что окружает нас в жизни, если смотреть с позиции геометрии, – это линии и поверхности простых и сложных форм. Поверхности широко используются в различных областях науки и техники при создании очертаний различных технических форм или как объекты инженерных исследований.

8.1. Основные понятия и определения

Поверхность как объект инженерного исследования может быть задана следующими основными способами: а) уравнением; б) каркасом; в) определителем; г) очерком.

Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия; она рассматривает поверхность как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $\boldsymbol{F(x, y, z) = 0}$.

В начертательной геометрии поверхность на чертеже задается каркасом, определителем, очерком.

При каркасном способе поверхность задается совокупностью некоторого количества линий, принадлежащих поверхности. В качестве линий, образующих каркас, как правило, берут семейство линий, получающихся при пересечении поверхности рядом параллельных плоскостей. Этот способ используется при проектировании кузовов автомобилей, в самолето – и судостроении, в топографии и т. п.

Поверхность, образованная движущейся в пространстве линией, на чертеже может быть задана определителем поверхности.

Определителем поверхности называется совокупность геометрических фигур и связей между ними, позволяющих однозначно образовать поверхность в пространстве и задать ее на чертеже.

Способ образования поверхности движущейся в пространстве линией называют *кинематическим*.

Линию, образующую при своем движении в пространстве данную поверхность называют образующей (производящей).

Образующая при своем движении может изменять свою форму или оставаться неизменной. Закон перемещения образующей можно, в частности, задать неподвижными линиями, на которые при своем движении опирается образующая. Эти линии называются *направляющими***.**

На чертеже при задании поверхности ее определителем строятся проекции направляющих линий, указывается, как находятся проекции образующей линии. Построив ряд положений образующей линии, получим каркас поверхности. Пример образования поверхности кинематическим способом показан на рис. 96.

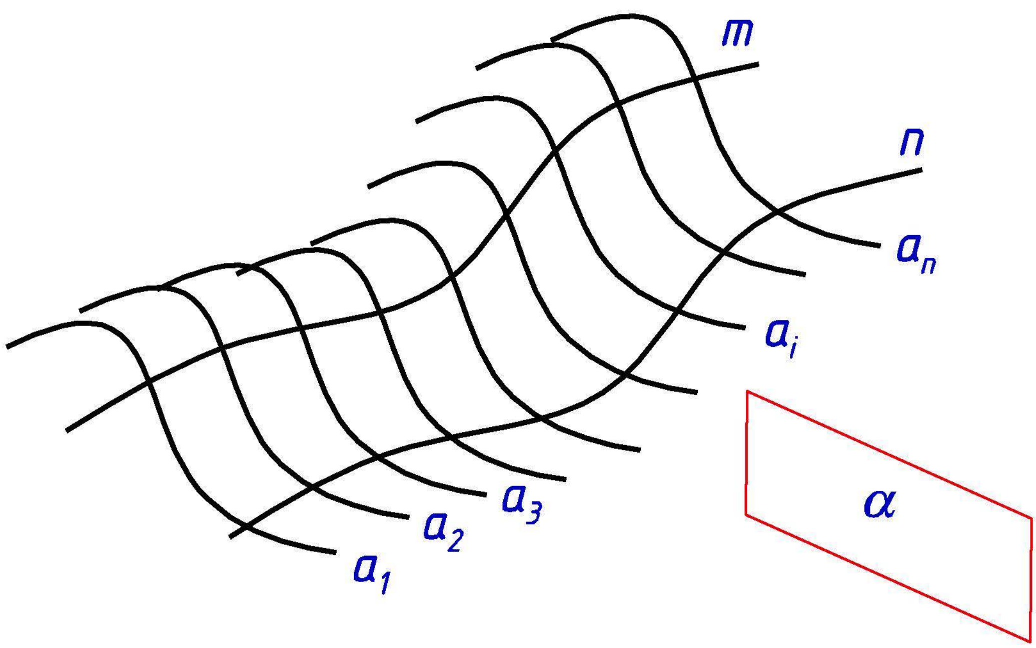
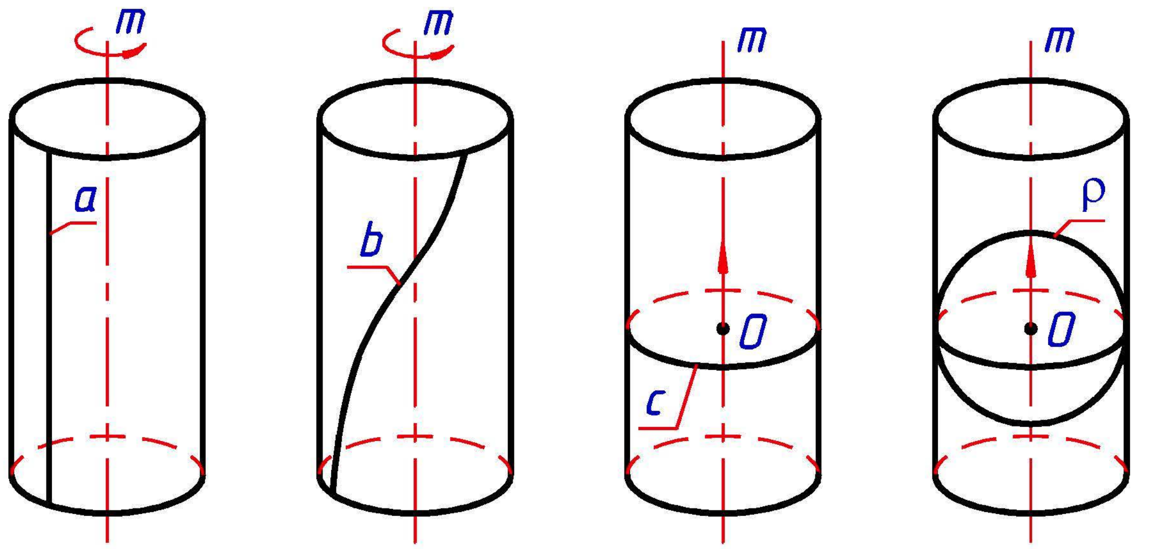


Рис. 96

В качестве образующей ***a*** этой поверхности взята плоская кривая. Закон перемещения образующей задан двумя направляющими ***m*** и ***n*** и плоскостью α**.** Образующая ***a*** скользит по направляющим, все время оставаясь параллельной плоскости α.

Различают геометрическую и алгоритмическую часть определителя поверхности. Определитель имеет следующую форму записи ***Ф(Г) [А]***, где ***Ф*** – обозначение поверхности; ***(Г)*** – *геометрическая часть определителя*, в ней перечисляются все геометрические фигуры, участвующие в образовании поверхности и задании ее на чертеже; ***[A]*** – *алгоритмическая часть определителя* – в ней записывается алгоритм формирования поверхности.

Определитель поверхности выявляется путем анализа способов образования поверхности или ее основных свойств. В общем случае одна и та же поверхность может быть образована несколькими способами, поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший. Например, боковая поверхность прямого кругового цилиндра может быть образована четырьмя способами (рис. 97):



$\Phi(a,m)\,[A_1]$ $\Phi(b,m)\,[A_2]$ $\Phi(c,m)\,[A_3]$ $\Phi(\rho,m)\,[A_4]$

а) б) в) г)

Рис. 97

а) как след, оставляемый в пространстве прямой ***a*** при ее вращении вокруг оси ***m*** (рис. 97,а).

Определитель поверхности – $\Phi\,(a, m)\,[A_1]$;

б) как след, оставляемый в пространстве кривой линией ***b*** при ее вращении вокруг оси ***m*** (рис. 97,б).

Определитель поверхности – $\Phi(b, m)\,[A_2]$;

в) как след, оставляемый в пространстве окружностью ***c*** при поступательном перемещении ее центра ***O*** вдоль оси ***m***, при этом плоскость окружности все время остается перпендикулярной к этой оси (рис. 97,в).

Определитель поверхности – $\Phi\,(c, m)\,[A_3]$;

г) как огибающую всех положений сферической поверхности $\boldsymbol{\rho}$ постоянного радиуса, центр которой перемещается по оси $\boldsymbol{m}$ (рис.97,г).

Определитель поверхности – $\boldsymbol{\Phi\ (\rho,\ m\ )\ [A_4\ ]}$.

Наиболее простым из рассматриваемых будет определитель $\boldsymbol{\Phi\ (\ a,\ m\ )\ [\ A_1]}$.

Задание поверхности на чертеже каркасом или определителем не всегда обеспечивает наглядность ее изображения. В некоторых случаях поверхность целесообразнее задавать ее очерком.

Очерком поверхности называется проекция проецирующей цилиндрической поверхности, огибающей заданную поверхность.

По известному уравнению поверхности или ее определителю, или очерку всегда можно построить каркас поверхности.

Многообразие поверхностей требует их систематизации. Для поверхностей, образованных кинематическим способом в основу систематизации положен их определитель.

В зависимости от вида образующей поверхности разделяются на два класса:

класс 1 – поверхности *нелинейчатые* (образующая – кривая линия);

класс 2 – поверхности *линейчатые* (образующая – прямая линия).

8.2. Поверхности нелинейчатые

Поверхности нелинейчатые подразделяют на поверхности с образующей переменного вида (изменяющей свою форму в процессе движения) и на поверхности с образующей постоянного вида.

8.2.1. Нелинейчатые поверхности с образующей переменного вида

К нелинейчатым поверхностям с образующей переменного вида относятся:

1. Поверхность общего вида. Такая поверхность образуется перемещением образующей переменного вида ***a*** по криволинейной направляющей ***m*** (рис. 98).

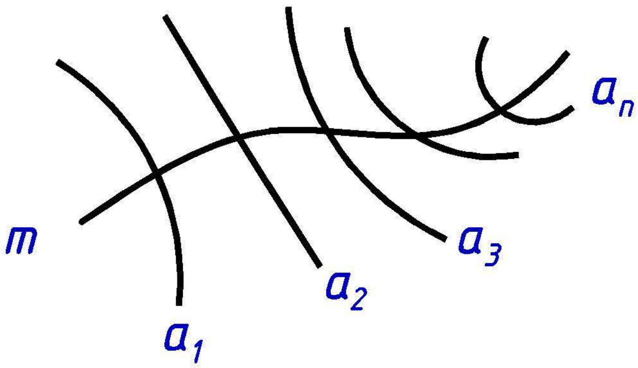


Рис. 98

2. Каналовая поверхность. Эта поверхность образуется движением плоской замкнутой линии, плоскость которой определенным образом ориентирована в пространстве (рис. 99).

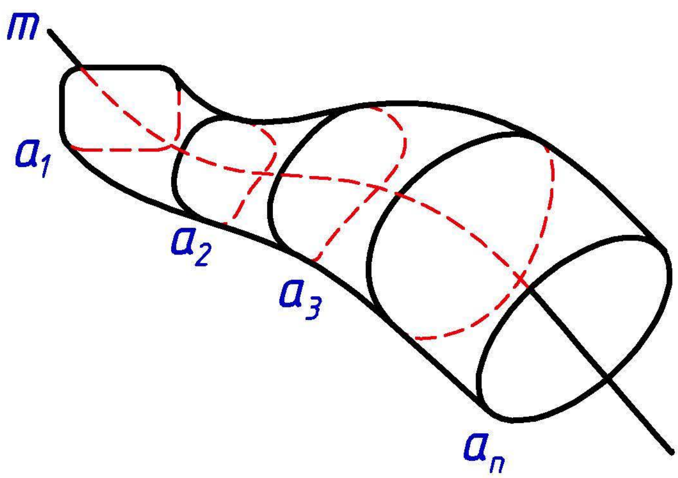


Рис. 99

Площадь, ограниченная образующей, монотонно изменяется в процессе ее движения по направляющей. Например, каналовую поверхность имеет переходный участок, соединяющий два трубопровода разной формы.

3. Циклическая поверхность – частный случай каналовой поверхности, когда образующая – окружность, радиус которой монотонно изменяется (рис. 100).

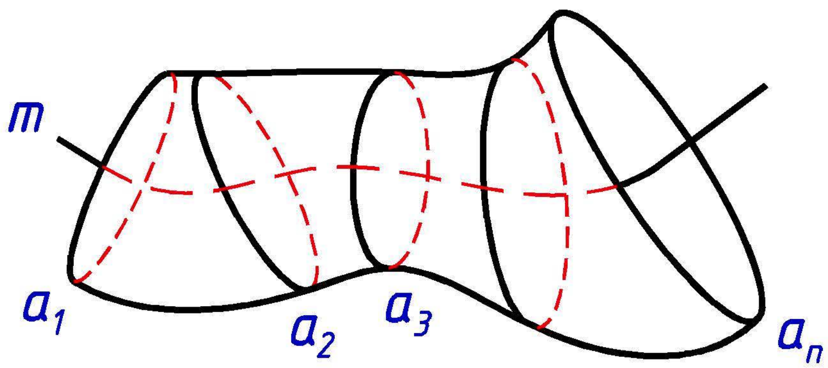


Рис. 100

Примером циклической поверхности может быть корпус духового музыкального инструмента.

8.2.2. Нелинейчатые поверхности с образующей постоянного вида

К нелинейчатым поверхностям с образующей постоянного вида относятся:

1. Поверхность общего вида. Такая поверхность может быть образована движением произвольной кривой линии ***a*** по направляющей ***m*** (рис. 101).

2. Трубчатая поверхность. Образующей трубчатой поверхности является окружность постоянного радиуса. Плоскость окружности при ее движении остается перпендикулярной к направляющей (рис. 102).

Примером трубчатой поверхности может быть поверхность проволоки круглого сечения.

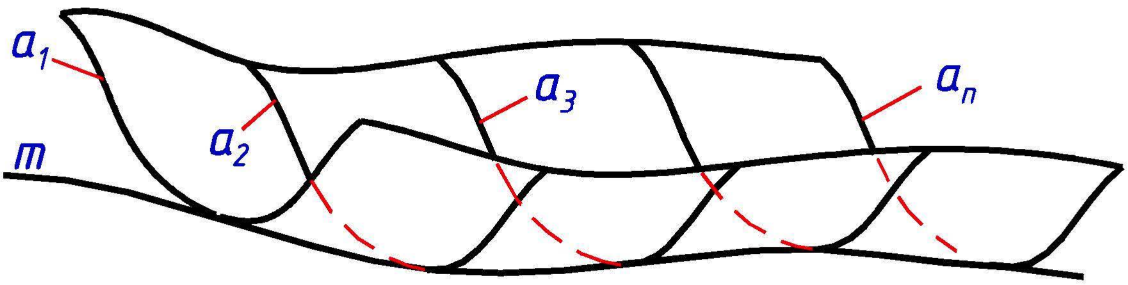


Рис. 101

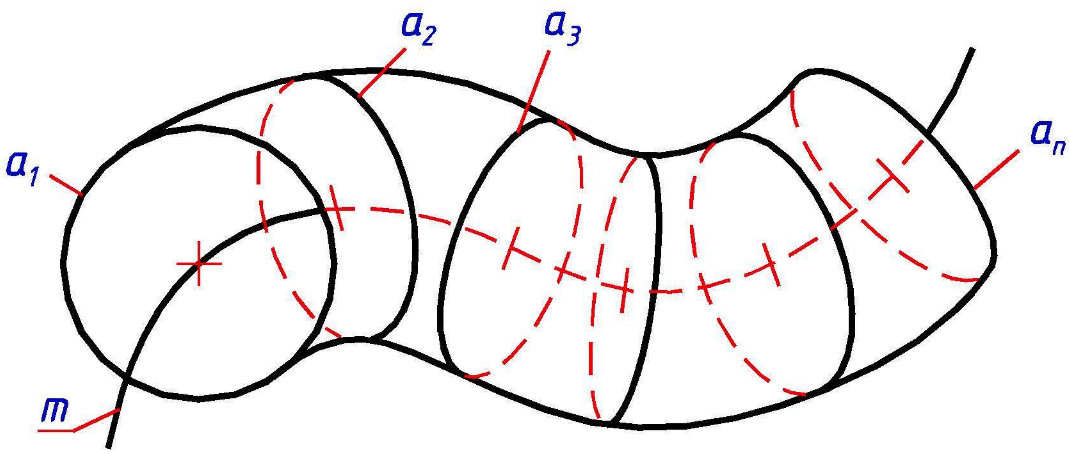


Рис.102

8.3. Поверхности линейчатые

Линейчатые поверхности образуются движением прямой (образующей) по заданному закону. В зависимости от закона движения образующей получаем различные линейчатые поверхности.

8.3.1. Линейчатые поверхности с тремя направляющими

К линейчатым поверхностям с тремя направляющими относятся:

1. Поверхность косого цилиндра. Такая поверхность может быть образована движением прямолинейной образующей по трем криволинейным направляющим (рис.103).

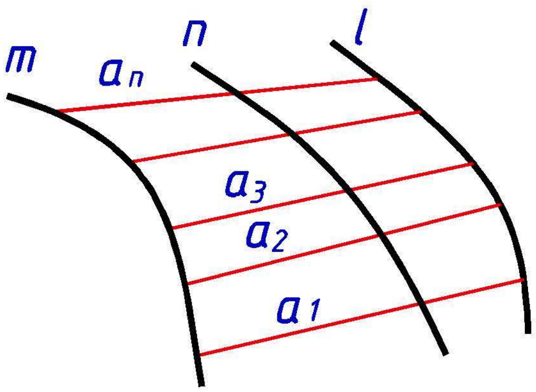


Рис.103

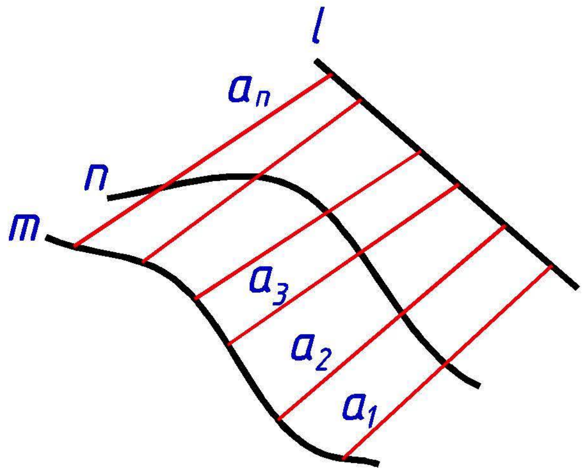


Рис.104

2. Поверхность дважды косого цилиндроида. Эта поверхность образуется в том случае, когда две направляющие кривые, а третья – прямая линия (рис.104).

3. Поверхность дважды косого коноида получается в том случае, когда одна из направляющих – кривая, а две других – прямые линии (рис. 105).

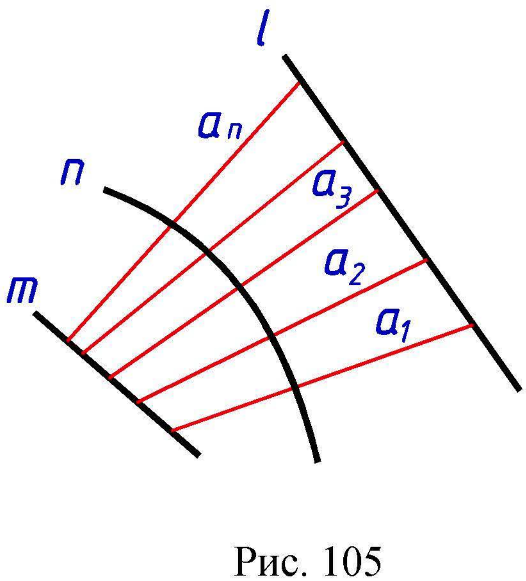


Рис. 105

4. Поверхность однополостного гиперболоида образуется в том случае, когда направляющие – три скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости.

Пример. Найти недостающие проекции точек A'' и B', принадлежащих поверхности однополостного гиперболоида (рис.106).

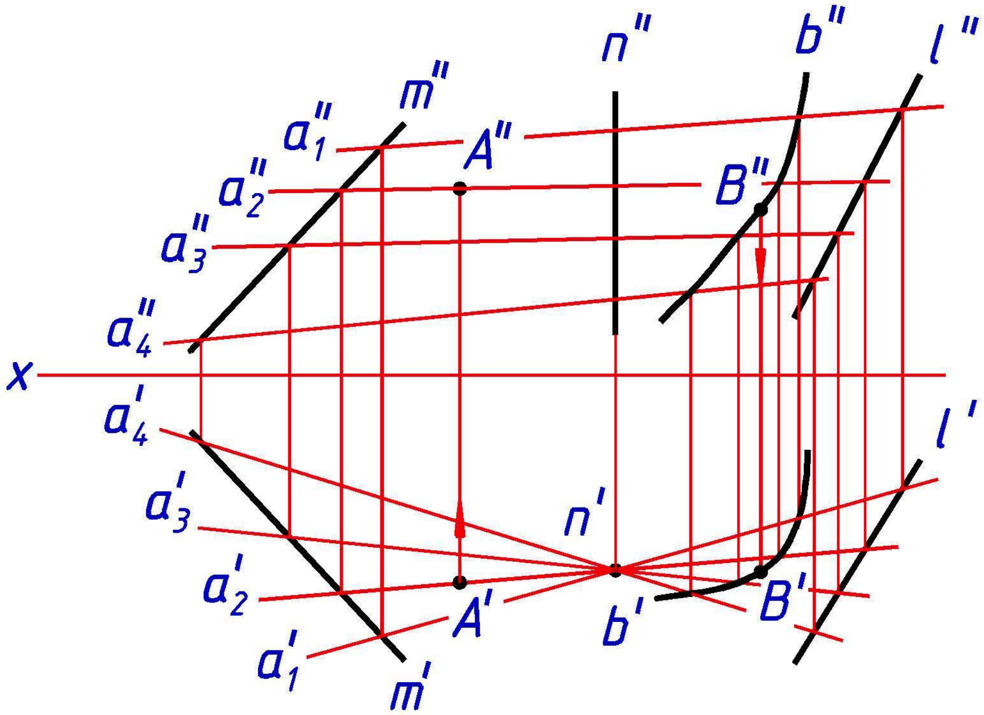


Рис.106

Р е ш е н и е**.** Для определения недостающей проекции точки, воспользуемся признаком принадлежности ее поверхности: *точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.*

Для данной линейчатой поверхности при построении проекций образующей сначала задается ее горизонтальная проекция, а затем находится фронтальная. Поэтому через известную горизонтальную проекцию точки A' проводим проекцию образующей a_2', определяем ее фронтальную проекцию a_2'', на которой по линии связи найдем искомую фронтальную проекцию точки A''.

Для определения недостающей горизонтальной проекции точки B' выполним следующие построения:

1. Построим ряд образующих заданной поверхности a_1, a_2, a_3, a_4 .

2. На фронтальной плоскости проекций через известную проекцию точки B'' проведем проекцию вспомогательной линии b'', принадлежащей заданной поверхности и пересекающей образующие.

3. По известным фронтальным проекциям точек пересечения проекции линии b'' с образующими a_1'', a_2'', a_3'', a_4'' найдем горизонтальные проекции этих точек. Соединив их плавной линией, построим горизонтальную проекцию вспомогательной линии b', на которой по линии связи найдем искомую проекцию точки B'.

К линейчатым поверхностям с тремя направляющими относятся, например, поверхности гребных винтов судов и пропеллеров самолетов. В архитектуре и строительстве они используются при возведении крытых зданий стадионов, рынков, вокзалов.

8.3.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

К линейчатым поверхностями с двумя направляющими и плоскостью параллелизма относятся:

1. Поверхность прямого цилиндроида. Такая поверхность может быть образована движением прямолинейной образующей по двум направляющим m и n в том случае, когда они – гладкие кривые линии, причем одна из них – плоская кривая, плоскость которой β перпендикулярна плоскости параллелизма α ($n \subset \beta$, $\beta \perp \alpha$) (рис. 107).

2. Поверхность прямого коноида. Эта поверхность получается в том случае, когда одна направляющая – кривая линия, а вторая – прямая, причем она перпендикулярна плоскости параллелизма α ($n \perp \alpha$) (рис.108). Поверхность прямого коноида используется в гидротехническом строительстве для формирования поверхности устоев мостовых опор.

3. *Поверхность гиперболического параболоида (косой плоскости).* Такая поверхность образуется в том случае, когда две направляющие – скрещивающие прямые (рис. 109). Поверхность косой плоскости применяется в инженерно – строительной практике для формирования поверхностей откосов, насыпей, железнодорожных и автомобильных дорог, набережных,

гидротехнических сооружений в местах сопряжения откосов, имеющих различные углы наклона.

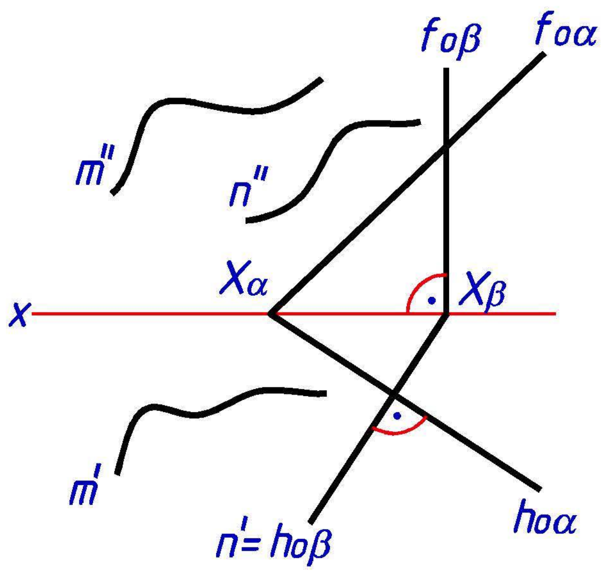


Рис.107

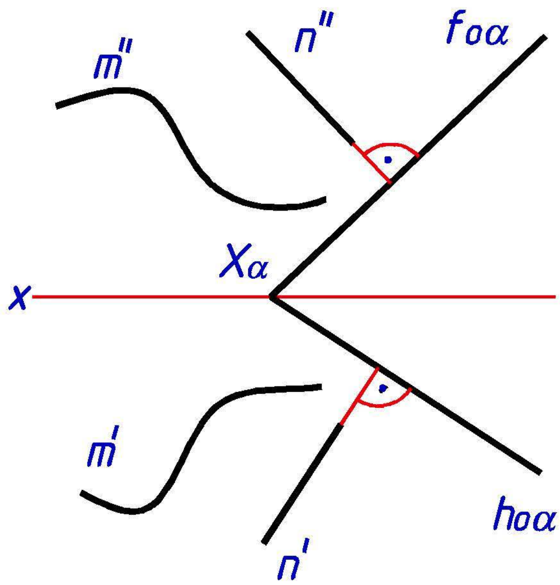


Рис.108

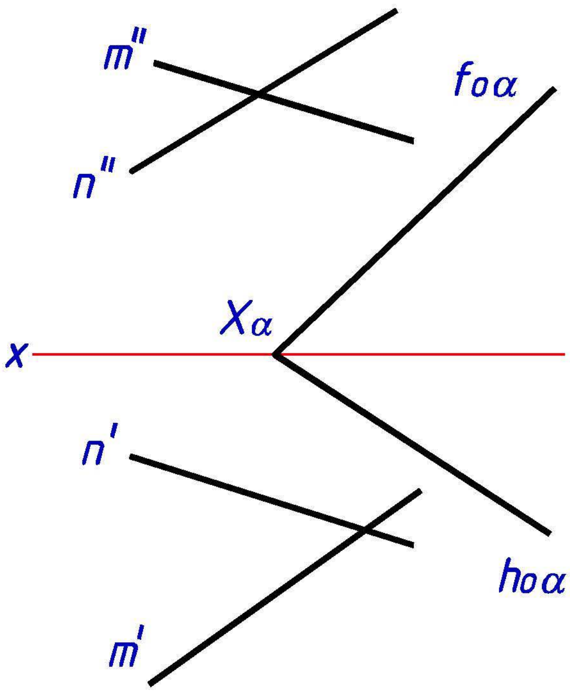


Рис. 109

8.3.3. Линейчатые поверхности с одной направляющей (торсы)

Торсы являются развертываемыми поверхностями – они могут быть совмещены с плоскостью без складок и разрывов. К торсовым поверхностям относятся:

1. *Поверхность с ребром возврата.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касательной к пространственной кривой, называемой ребром возврата.

2. *Цилиндрическая поверхность.* Данная поверхность образуется движением прямолинейной образующей, скользящей по кривой направляющей и остающейся параллельной своему исходному состоянию (рис.110).

3. *Коническая поверхность.* Эта поверхность образуется движением прямолинейной образующей, скользящей по кривой направляющей и проходящей во всех своих положениях через одну и ту же неподвижную точку ***S*** (рис.111).

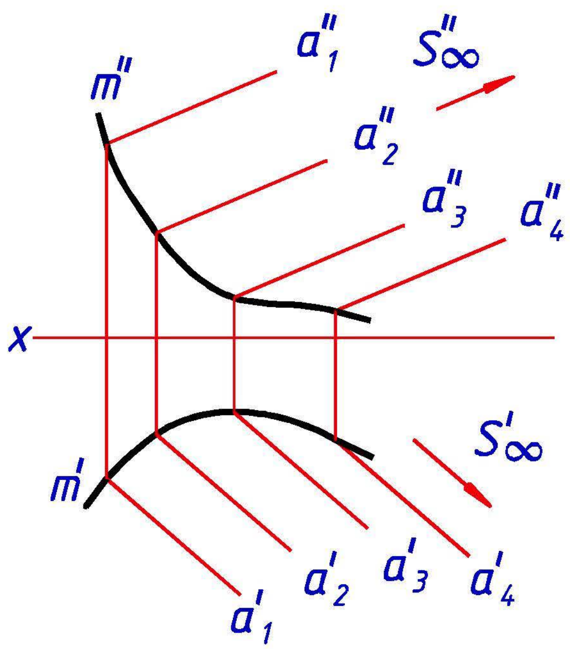


Рис.110

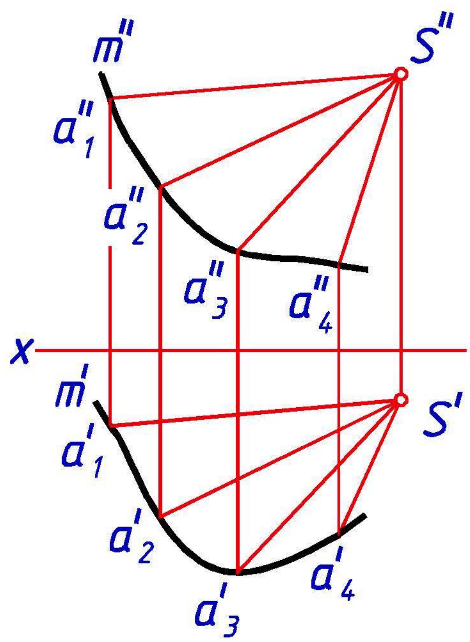


Рис.111

8.4. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называют поверхность, получаемую вращением какой-либо образующей линии вокруг неподвижной прямой – оси вращения поверхности.

Плоскости, перпендикулярные оси вращения, пересекают поверхность по окружностям – *параллелям*. Наименьшую параллель называют *горлом*, наибольшую – *экватором*.

На рис.112 показана поверхность вращения. Здесь образующей является плоская кривая ***ABCD*** , ось вращения ***i*** расположена в одной плоскости с этой кривой.

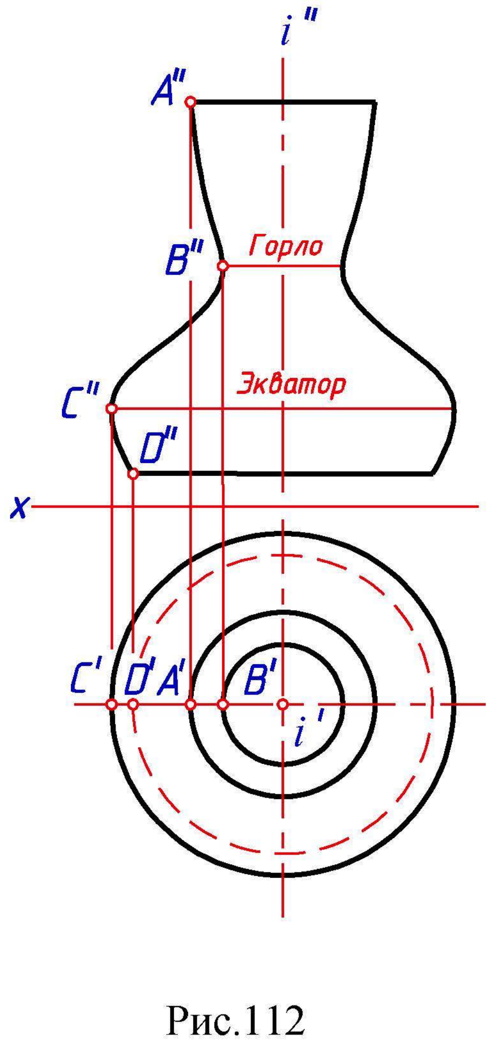


Рис.112

Линии, по которым плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность называют *меридианами*. Каждый меридиан разделяется на две симметричные относительно оси вращения линии, называемые полумеридианами. Меридиан, расположенный в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, называют *главным меридианом*.

Основные свойства поверхности вращения:

1. Отрезок меридиана между двумя точками поверхности есть кратчайшее расстояние между этими точками.
2. Все меридианы равны между собой.
3. Каждая из параллелей поверхности вращения пересекает меридианы под прямым углом.
4. Любая из нормалей к поверхности вращения пересекает ось вращения поверхности.

Поверхности вращения на чертеже удобно задавать очерками, проекциями ее характерных линий и точек. Фронтальным очерком поверхности вращения является фронтальная проекция главного меридиана, а горизонтальным – горизонтальная проекция экватора.

Рассмотрим основные виды поверхностей вращения:

1. *Цилиндр вращения.* Эта поверхность может быть получена вращением прямой, параллельной оси вращения i (рис.113).
2. *Конус вращения.* Поверхность конуса вращения может быть получена вращением прямой, пересекающей ось вращения i (рис.114).

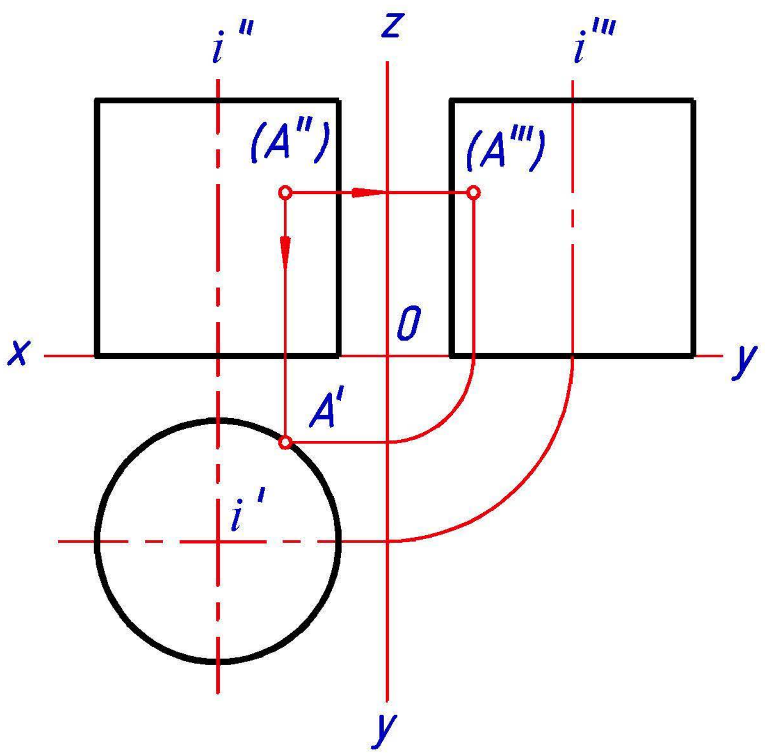


Рис.113

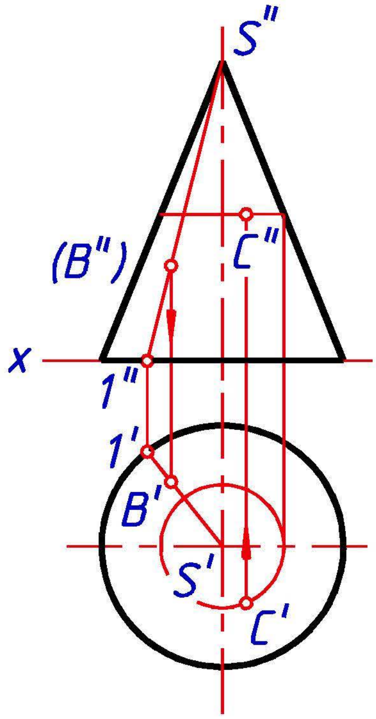


Рис.114

3. *Сфера.* Образующая сферы – окружность, центр которой ***O*** находится на оси вращения ***i*** (рис.115).

4. *Тор***.** Образующая тора – окружность или ее дуга. Ось вращения ***i*** лежит в плоскости этой окружности, но не проходит через ее центр (рис.116, 117).

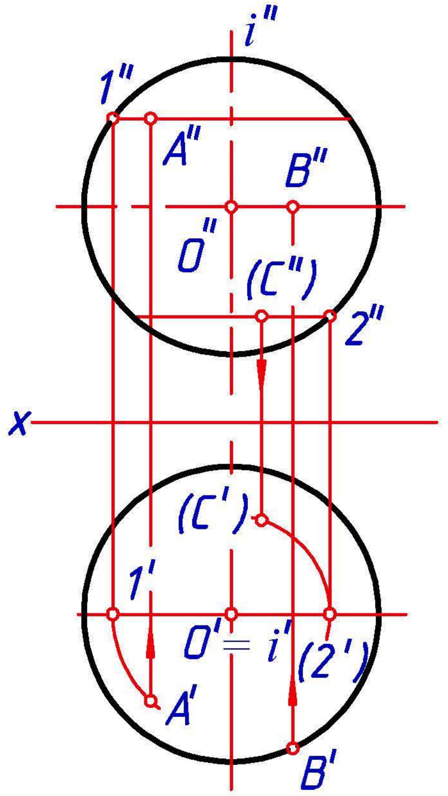


Рис.115

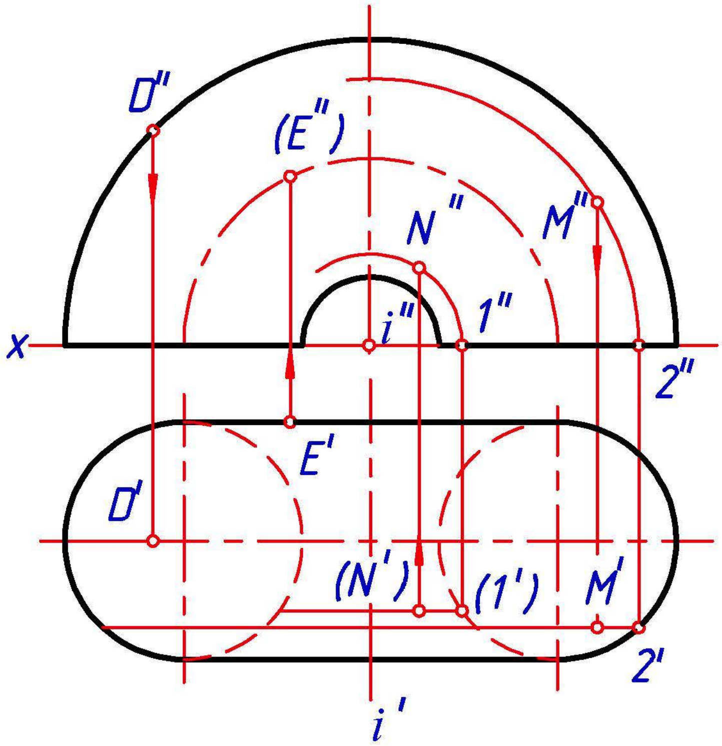
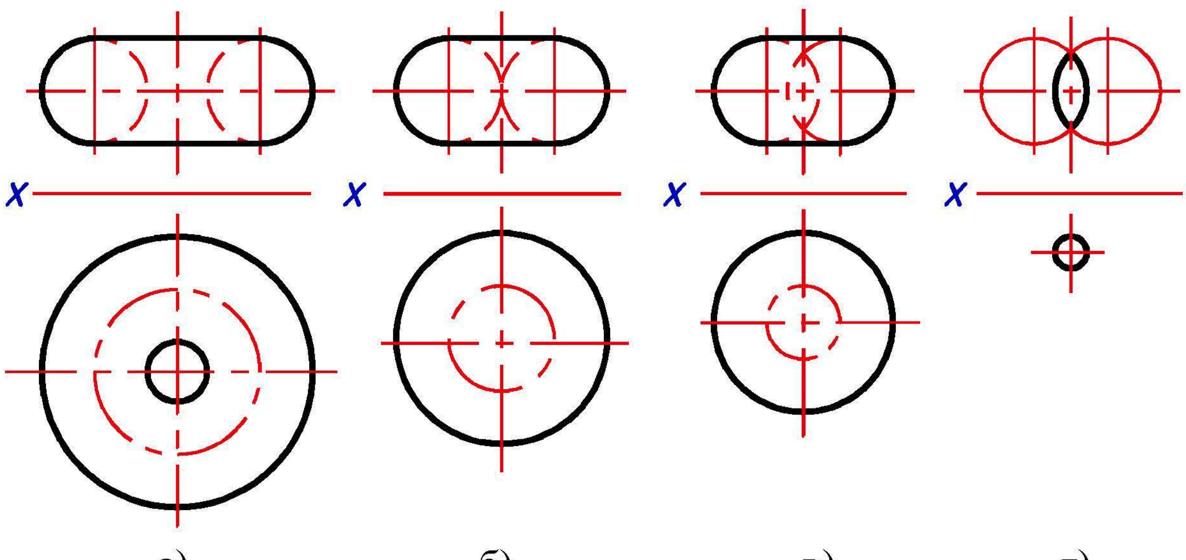


Рис.116



а) б) в) г)

Рис.117

Различают *открытый тор* (*круговое кольцо)* (рис.116,117,а), *закрытый* (рис. 117, б), *самопересекающийся* (рис. 117, в, г).

Образующей для открытого (рис. 116,117,а) и закрытого тора (рис.117,б) служит окружность, для самопересекающегося (рис.117, в, г) – дуга окружности.

5. *Параболоид вращения.* Такая поверхность образуется при вращении параболы вокруг ее оси (рис.118). Поверхность параболоида используется в параболических антеннах и зеркалах рефлекторов.

6. *Гиперболоид вращения.* Эта поверхность образуется при вращении гиперболы вокруг оси. Различают *двуполостный* и *однополостный гиперболоид вращения*. Для двуполостного гиперболоида вращения осью вращения служит действительная ось гиперболы (рис.119), для однополостного гиперболоида (рис.120) – ее мнимая ось. Однополостный гиперболоид вращения также может быть образован вращением прямой линии в случае, если образующая и ось вращения – скрещивающиеся прямые.

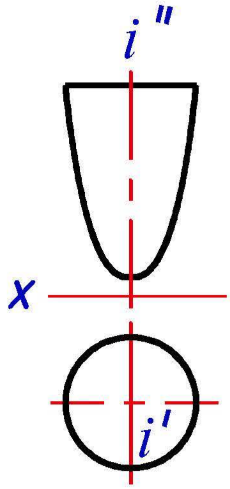


Рис.118

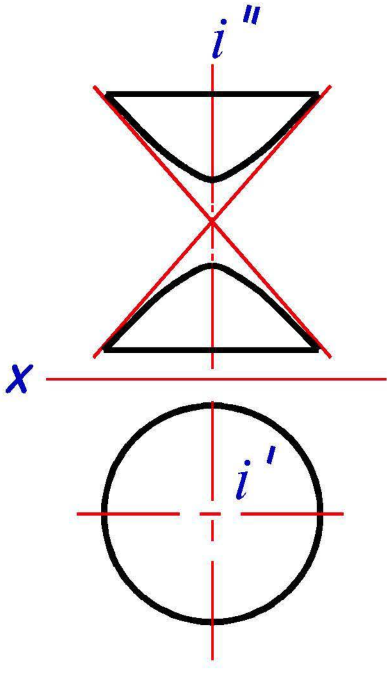


Рис.119

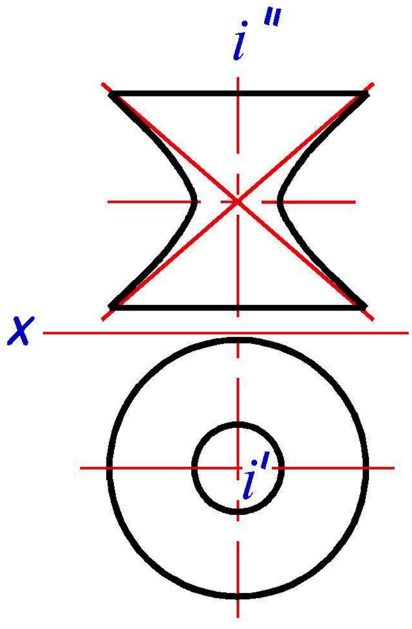


Рис.120

Положение точки на поверхности вращения определяется с помощью окружности, которая проходит на поверхности вращения через эту точку (см. рис.114–116). В случае линейчатых поверхностей вращения (цилиндр, конус) возможно использование для этой цели прямолинейных образующих (см. рис.113,114).

8.5. Винтовые линейчатые поверхности

Винтовой линейчатой поверхностью называется поверхность, образуемая винтовым перемещением прямой.

Винтовое перемещение образующей ***AB*** характеризуется вращением ее вокруг оси ***i*** и одновременным поступательным движением, параллельным этой оси (рис.121). Закон перемещения образующей определяется видом винтовой линии (ее направлением, диаметром и шагом) и характером перемещения образующей по направляющей.

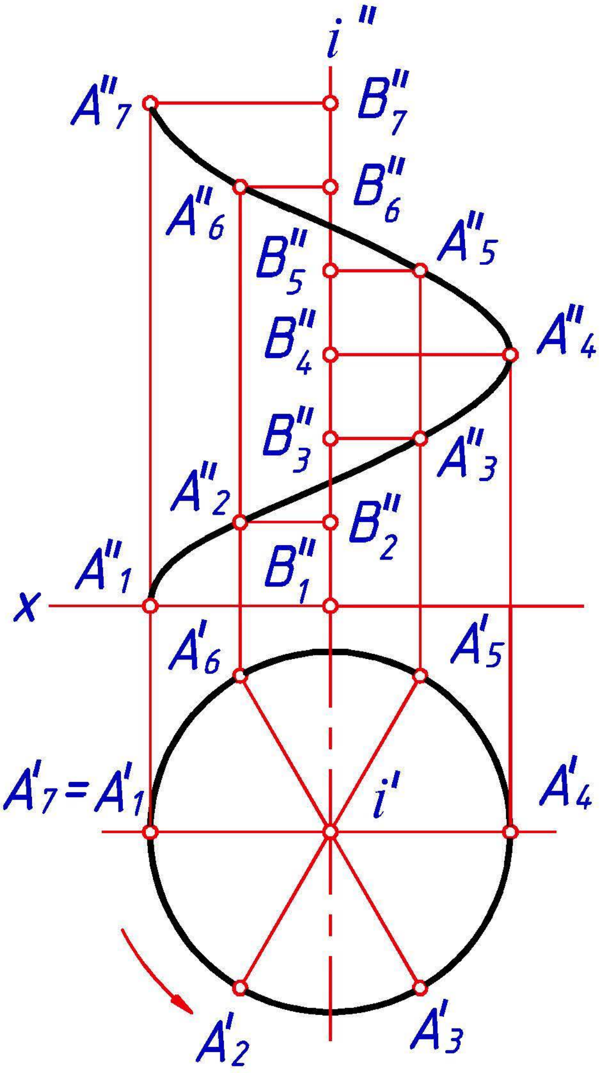


Рис.121

На практике чаще всего встречаются винтовые линейчатые поверхности с постоянным шагом направляющей линии. Такие винтовые поверхности называются геликоидами.

Если угол наклона образующей к оси вращения равен 90^0, то геликоид называется *прямым*, если этот угол произвольный, отличный от 0 и 90^0, то геликоид называется *косым (наклонным)*. Прямые и косые геликоиды могут быть *открытыми* и *закрытыми*. У открытого геликоида образующая и ось вращения – скрещивающиеся прямые, у закрытого – пересекающиеся прямые. На рис. 121 построен каркас прямого закрытого геликоида.

Винтовые поверхности широко используются в технике. Винты, пружины, сверла, шнеки для перемещения сыпучих материалов, винтовые лестницы – все они имеют винтовые поверхности.

Контрольные вопросы

1. Что такое образующая линия поверхности?
2. Что такое направляющая линия?
3. Как задаются поверхности на комплексном чертеже?
4. Что такое определитель поверхности?
5. Что такое очерк поверхности?
6. В чем различие линейчатой и нелинейчатой поверхности?
7. Как образуется однополостный гиперболоид?
8. Как образуются поверхности вращения?
9. Перечислите основные свойства поверхности вращения.
10. Как определить положение точки на поверхности вращения?
11. Какие поверхности называются циклическими?

ГЛАВА 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

Рассмотрим общие и частные приемы построения линии пересечения кривой поверхности плоскостью, а также приемы определения точек пересечения кривой поверхности и прямой.

9.1. Пересечение кривой поверхности плоскостью

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую линию.

В общем случае для определения точек этой линии используют следующий алгоритм:

1. Ввести вспомогательную плоскость.
2. Найти линии пересечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью.
3. Найти прямую пересечения двух плоскостей – вспомогательной и заданной.
4. В пересечении найденных линий и прямой получим точки (чаще всего – две), принадлежащие линии пересечения поверхности с плоскостью.
5. Повторив перечисленные операции необходимое число раз, определим точки, соединив которые получим искомую линию пересечения поверхности с плоскостью.

Вспомогательные плоскости следует выбирать так, чтобы проекции линий их пересечения с поверхностью были простыми – прямыми или окружностями.

Построение линии пересечения следует начинать с определения ее *опорных точек* (высшей и низшей, точек смены видимости и др.). Способы определения опорных точек зависят от вида поверхности, положения поверхности и пересекающей ее плоскости в пространстве.

Видимость линии пересечения определяется по видимости поверхности, которой она принадлежит. Видимые участки линии пересечения находятся на видимой части поверхности, невидимые – на невидимой.

Если поверхность задана ее очерками, то точки смены видимости линии пересечения всегда лежат на очерках поверхности и делят проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

При построении линии пересечения кривой поверхности плоскостью следует учитывать следующие особенности:

1. Если поверхность линейчатая, то точки, принадлежащие линии пересечения ее с плоскостью удобно определять как точки пересечения образующих поверхности (прямых) с секущей плоскостью.

2. Если поверхность проецирующая (прямой цилиндр, прямая призма), то одна проекция линии пересечения ее с плоскостью известна – она совпадает с соответствующей проекцией поверхности.

3. Если секущая плоскость проецирующая, то одна проекция линии пересечения ее с поверхностью совпадает с соответствующим следом плоскости, вторая проекция линии пересечения находится из принадлежности ее точек поверхности.

Построение линии пересечения обычно упрощается, если преобразовать комплексный чертеж так, чтобы секущая плоскость заняла проецирующее положение.

Следует отметить, что приемы построения линии пересечения кривой поверхности плоскостью и линии пересечения многогранника плоскостью одинаковы, так как любую кривую поверхность можно аппроксимировать поверхностью многогранника. Так, цилиндрическую поверхность можно аппроксимировать поверхностью призмы, коническую – пирамидой.

9.2. Пересечение поверхности вращения плоскостью

Для построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхности вращения плоскостью целесообразно использовать вспомогательные плоскости, перпендикулярные к оси вращения. В этом случае вспомогательная плоскость будет пересекать поверхность по окружности.

Сечение поверхности вращения плоскостью является симметричной фигурой. Ось симметрии фигуры принадлежит общей плоскости симметрии поверхности и секущей плоскости. Плоскость симметрии проходит через ось вращения поверхности и перпендикулярна секущей плоскости.

Рассмотрим пересечение плоскостью поверхности прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса.

В зависимости от положения секущей плоскости линиями пересечения прямого кругового цилиндра могут быть:

1. *Прямая* – секущая плоскость касательна к поверхности цилиндра (рис.122).
2. *Две параллельные прямые* – секущая плоскость параллельна оси вращения ***i*** (рис.123).

3. *Окружность* – секущая плоскость перпендикулярна оси вращения ***i***.

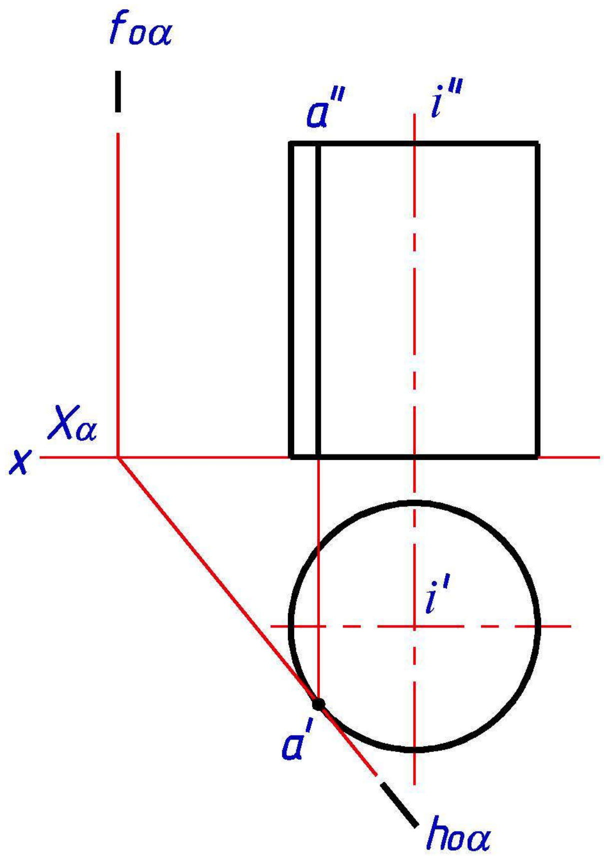


Рис.122

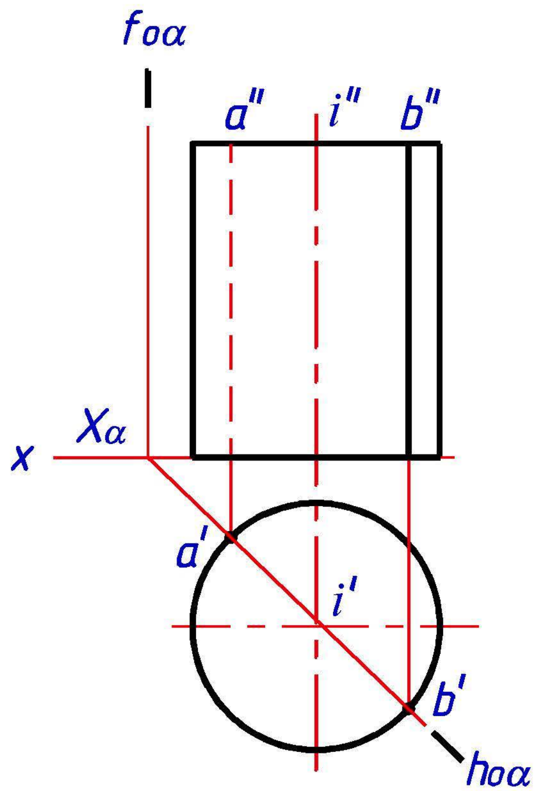


Рис.123

4. *Эллипс* – секущая плоскость пересекает все образующие поверхности, т.е. не параллельна и не перпендикулярна оси вращения ***i*** (рис.124,125).

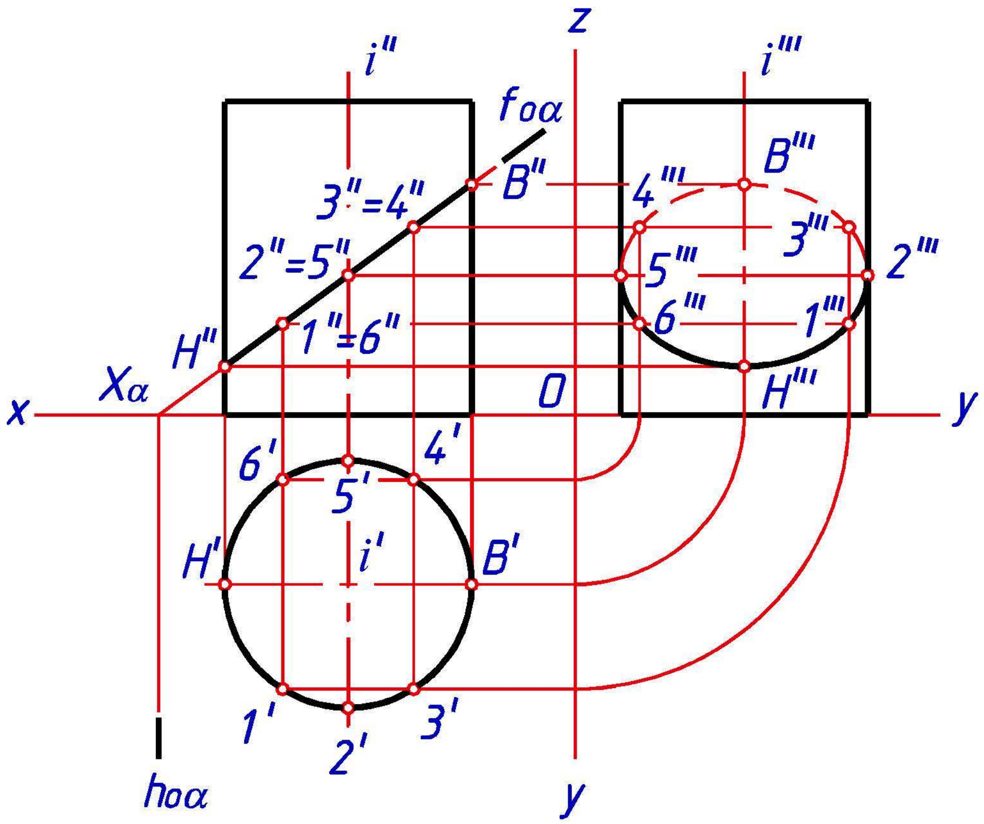


Рис.124

На рис.124 прямой круговой цилиндр пересекается по эллипсу фронтально проецирующей плоскостью α. Горизонтальная проекция эллипса совпадает с горизонтальным очерком цилиндра, фронтальная – с одноименным следом плоскости α. Отрезки ***B'' H''*** и ***2' 5'*** равны соответственно длинам большой и малой осей эллипса.

Если угол между плоскостью α и осью цилиндра ***i*** равен 45°, то проекцией эллипса на плоскость π_3 является окружность.

Пример 1. Построить линию пересечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения α (рис.125).

Р е ш е н и е. В сечении получаем эллипс, так как секущая плоскость не параллельна и не перпендикулярна оси вращения. Ось вращения цилиндра перпендикулярна π_1, поэтому горизонтальной проекцией искомой линии пересечения является окружность, совпадающая с горизонтальным очерком поверхности цилиндра.

Построение фронтальной проекции линии пересечения начинаем с определения ее опорных точек. Высшую (***B***) и низшую (***H***) точки линии пересечения находим, введя вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость γ_1 так, чтобы ее горизонтальный след был перпендикулярен следу $h_{o\alpha}$ и проходил через ось цилиндра. Эта плоскость является общей плоскостью симметрии цилиндра и секущей плоскости α.

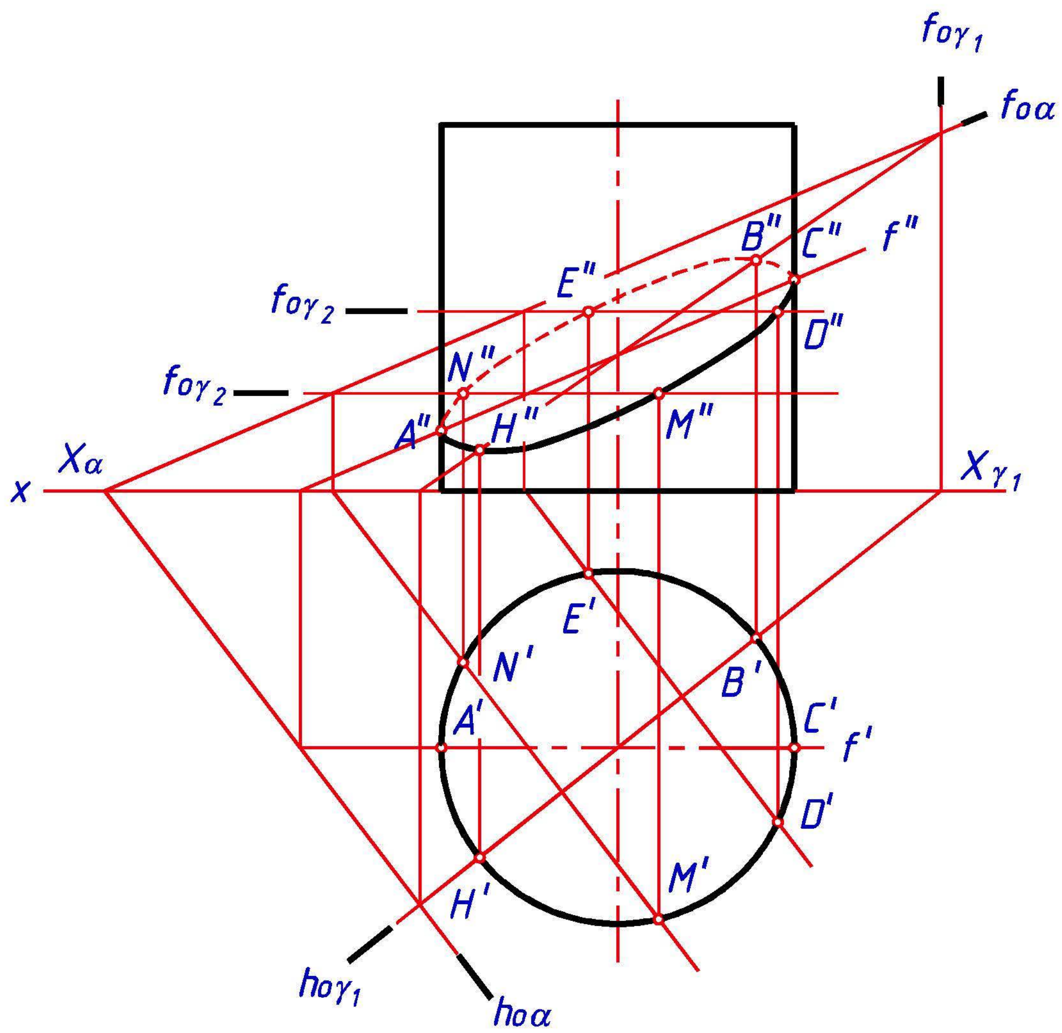


Рис.125

Найдя проекции линии пересечения плоскостей α и γ_1, сначала определим горизонтальные, а затем фронтальные проекции высшей

(***B***) и низшей (***H***) точек линии пересечения. Горизонтальные проекции точек смены видимости (***A***, ***C***) известны, фронтальные проекции этих точек найдем из условия их принадлежности фронтали ***f*** плоскости **α**. Промежуточные точки (***D***, ***E***, ***M***, ***N***) определим с помощью вспомогательных плоскостей γ_2, γ_3.

В сечении прямого кругового конуса плоскостью может получиться точка, прямая, две прямых, парабола, эллипс, окружность. Признаками, определяющими вид сечения, могут служить значения углов Θ и φ наклона секущей плоскости и образующих конуса к оси вращения конуса (рис. 126 – 128).

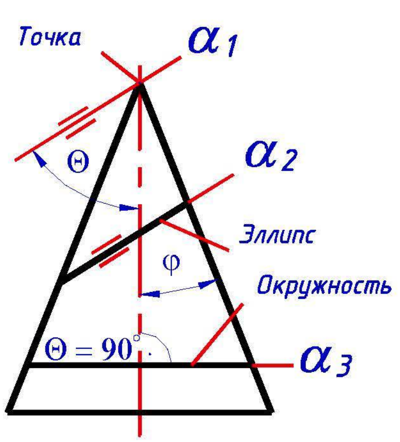


Рис.126

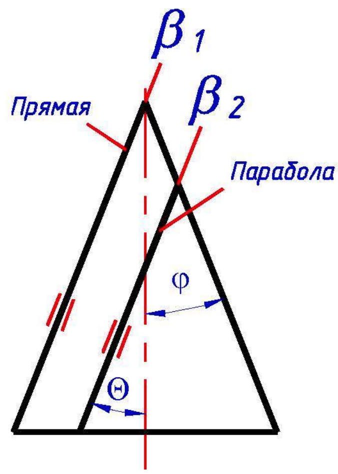


Рис. 127

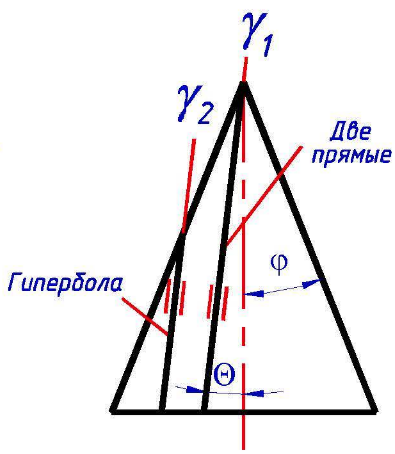


Рис.128

Рассмотрим следующие случаи.

1. Секущая плоскость проходит через вершину конуса.

В сечении конуса может получиться *точка* ($90^\circ > \Theta > \varphi$) (рис. 126), *прямая* ($\Theta = \varphi$) (рис. 127), *две прямые* ($\varphi > \Theta \geq 0^\circ$) (рис. 128).

2. Секущая плоскость не проходит через вершину конуса.

Линиями пересечения могут быть: *эллипс* ($90^\circ > \Theta > \varphi$), *окружность* ($\Theta = 90^\circ$) (рис. 126), *парабола* ($\Theta = \varphi$) (рис. 127), *гипербола* ($\varphi > \Theta \geq 0^\circ$) (рис. 128).

В общем случае для построения линии пересечения прямого кругового конуса плоскостью следует находить точки пересечения образующих конуса с секущей плоскостью.

Пример 2. Построить линию пересечения прямого кругового конуса фронтально проецирующей плоскостью α (рис.129).

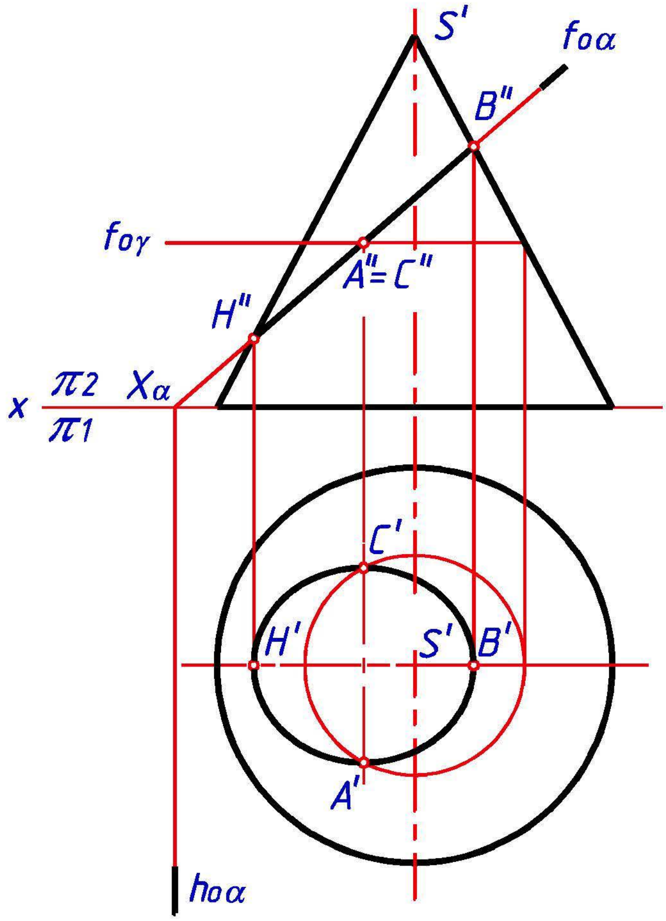


Рис.129

Р е ш е н и е. В сечении получаем эллипс, так как секущая плоскость пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна его оси вращения. Фронтальная проекция линии пересечения известна – она совпадает с фронтальным следом плоскости $h_{0\alpha}$ (точки B'', H'', A'', C''). Большая ось эллипса BH проецируется на плоскость π_2 без искажения. Точка B''– высшая, H''– низшая точки линии сечения. Проекция малой оси эллипса на плоскость π_2 вырождается в точку $A''=C''$, расположенную в середине отрезка $B''H''$.

Для определения горизонтальной проекции малой оси эллипса через известную ее фронтальную проекцию проводим горизонтальную плоскость γ. В сечении конуса получаем окружность, на горизонтальной проекции которой находим точки A', C'. Проекции других точек линии пересечения можно найти с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей.

9.3. Пересечение кривой поверхности прямой

В общем случае для построения точек пересечения кривой поверхности прямой используется следующий алгоритм:

1. Прямую заключить во вспомогательную плоскость.
2. Найти линии пересечения (одну или две) вспомогательной плоскости с заданной поверхностью.
3. В пересечении найденных линий и заданной прямой найти искомые точки пересечения.

Чтобы получить рациональное решение следует использовать наиболее простой способ определения линии пересечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью путем подбора положения вспомогательной плоскости или перевода заданной прямой в частное положение.

Для определения видимости прямой можно использовать метод конкурирующих точек.

В примерах, приведенных далее, преимущественно рассмотрены геометрические тела, т.е. ограниченные части пространства вместе с их границами – поверхностями.

Пример 3. Найти точки пересечения прямой a с поверхностью тора (рис.130).

Р е ш е н и е. Заключаем прямую a в плоскость γ, перпендикулярную к оси вращения тора i и параллельную плоскости π_2. Плоскость γ пересекает тор *по двум* окружностям. В пересечении этих окружностей прямой a получим искомые точки K_1 и K_2.

Пример 4. Найти точки пересечения прямой b с поверхностью конуса (рис.131).

Р е ш е н и е. Так как прямая b проецирующая, то одна ее проекция – точка. Она совпадает с соответствующими проекциями точек пересечения прямой с поверхностью ($b' = K_1' = K_2'$). Фронтальные проекции этих точек находятся из условия их принадлежности поверхности.

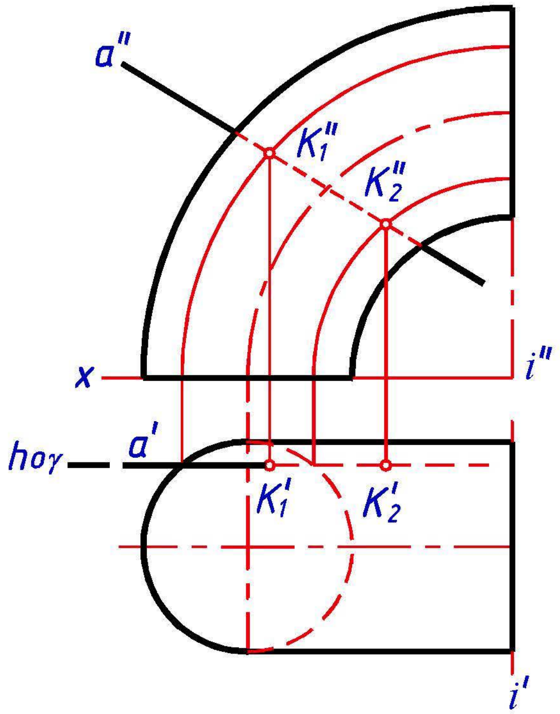


Рис.130

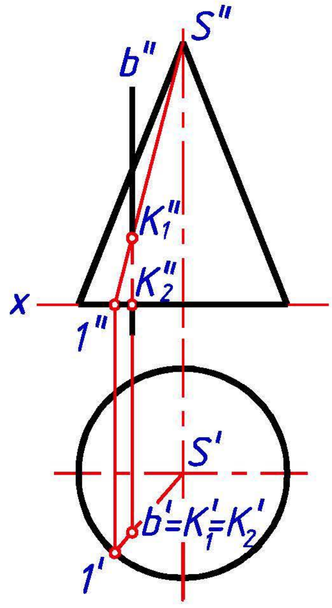


Рис.131

Контрольные вопросы

1. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения плоскостями?
2. Какие линии получаются при пересечении конуса вращения плоскостями?
3. Как строится малая ось эллипса, получаемого при пересечении конуса вращения плоскостью?
4. Как в общем случае строятся точки пересечения прямой линии с кривой поверхностью?
5. Как в общем случае строятся линии пересечения кривой поверхности плоскостью?

ГЛАВА 10. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Две кривые поверхности пересекаются по линии, одновременно принадлежащей каждой из них. Эта линия строится по точкам. В общем случае линия пересечения двух поверхностей представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части.

Пусть заданы две пересекающиеся поверхности $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (рис.132).

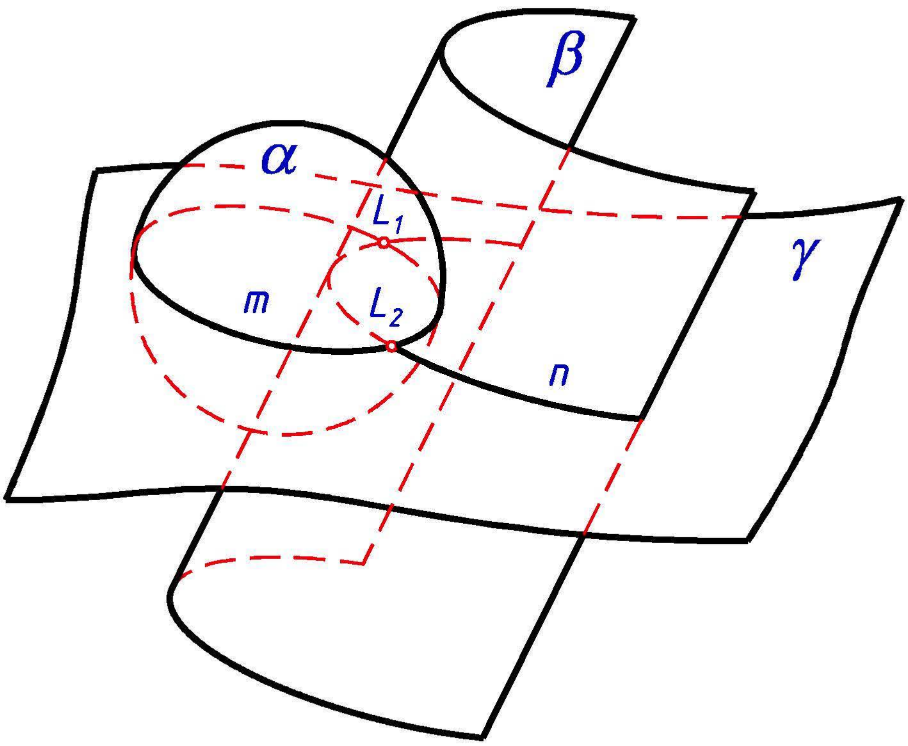


Рис.132

В общем случае для построения точек L_1 и L_2, принадлежащих линии пересечения двух кривых поверхностей, используется следующий алгоритм:

1. Ввести вспомогательную секущую поверхность – посредник $\boldsymbol{\gamma}$.
2. Определить линии $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ пересечения поверхности – посредника $\boldsymbol{\gamma}$ с каждой из заданных поверхностей.
3. В пересечении линий $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ найти искомые точки L_1 и L_2.

Последовательно введя ряд поверхностей-посредников, найдем необходимое число точек, принадлежащих линии пересечения. Соединив в определенной последовательности найденные точки плавной линией, получим искомую линию пересечения двух поверхностей.

Видимость участков линии пересечения определяется с помощью конкурирующих точек. Видимые участки линии пересечения находятся на видимых частях пересекающихся поверхностей, невидимые – на невидимых.

Секущие поверхности–посредники выбирают такие, чтобы проекции линий их пересечения с заданными поверхностями были простыми – прямыми или окружностями. В качестве поверхностей–посредников обычно используют плоскости или сферы.

Рассмотрим построение линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.

Построение линии пересечения начинают с определения ее опорных точек (высшей, низшей, точек смены видимости и др.). Способы определения опорных точек зависят от вида пересекающихся поверхностей, их взаимного положения и положения относительно плоскостей проекций.

Высшая и низшая точки линии пересечения позволяют установить граничные положения вспомогательных секущих плоскостей.

Для уточнения вида линии пересечения находят ее промежуточные точки. При этом следует учесть, что проекции линии пересечения двух поверхностей всегда находятся в пределах контура наложения проекций этих поверхностей (заштрихованные области на рис.133).

При построении линии пересечения двух поверхностей следует учитывать следующие особенности:

1. Если одна из пересекающихся поверхностей проецирующая, то одна проекция линии пересечения известна – она совпадает с вырожденной проекцией этой поверхности (рис.134).

2. Если хотя бы одна из пересекающихся поверхностей линейчатая, то точки, принадлежащие линии пересечения находятся как точки пересечения прямолинейных образующих этой поверхности с другой поверхностью (рис.134).

*3. Если пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии, то высшая (**В**) и низшая (**Н**) точки линии пересечения принадлежат этой плоскости и могут быть построены точно (рис.133, 135). В противном случае они строятся приближенно (рис. 134).*

4. Если плоскость симметрии пересекающихся поверхностей параллельна одной из плоскостей проекций, то на ней совпадают проекции видимой и невидимой частей линии пересечения (рис.133).

*5. Если обе пересекающиеся поверхности заданы проекциями их очерков, то проекции линии их пересечения касаются очерков поверхностей (точки **B'', H'', A' C'** на рис.133 и точки **D''**, **E''**, **M''**, **N'', A', C'** на рис.135). Причем точки смены видимости линии пересечения всегда находятся на очерке той поверхности, которая расположена ближе к наблюдателю.*

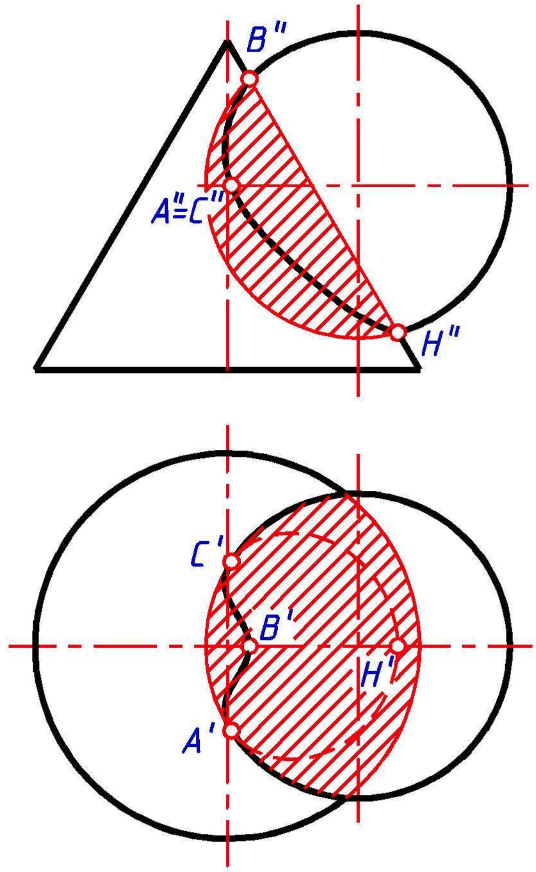


Рис.133

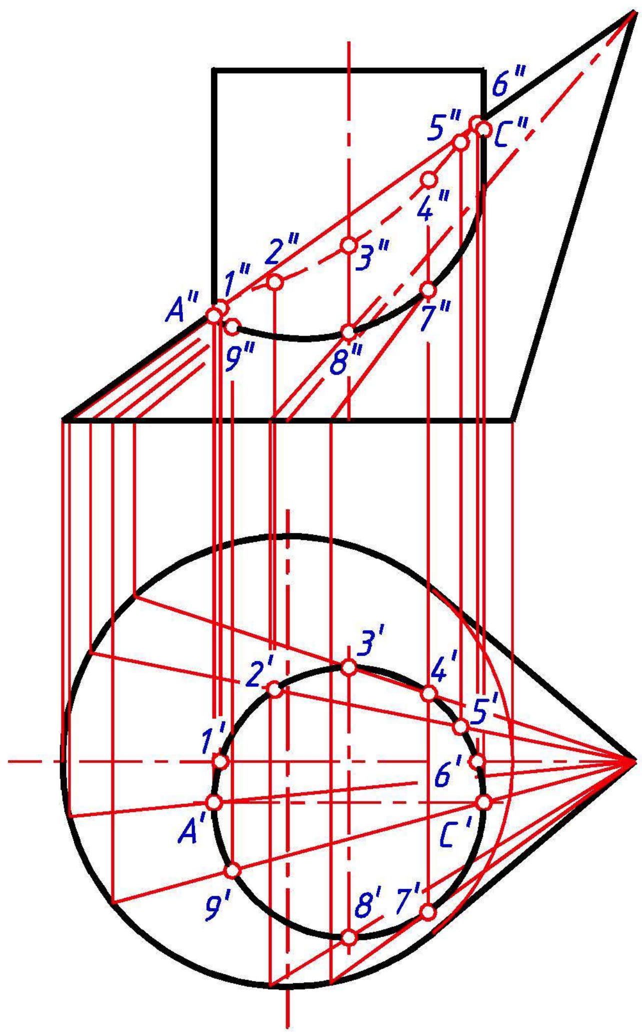


Рис.134

Пример. Построить линию пересечения поверхностей конуса и сферы (рис.135).

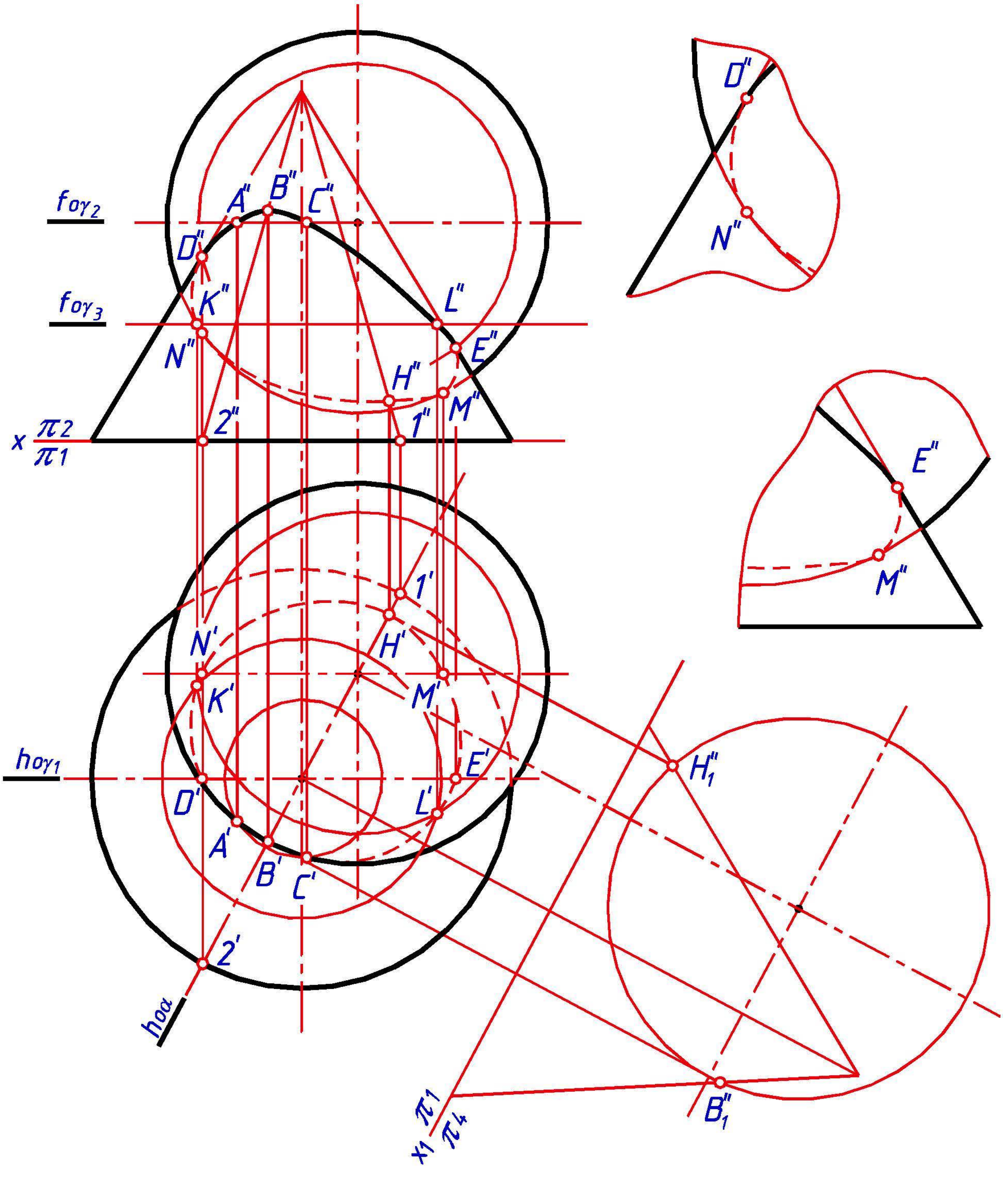


Рис.135

Р е ш е н и е. Определим опорные точки линии пересечения. Заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии **α**, которая проходит через ось вращения конуса и центр сферы. В этой плоскости находятся высшая (***B***) и низшая (***H***) точки линии пересечения поверхностей. Для определения проекций этих точек воспользуемся способом замены плоскостей проекций – построим очерки заданных поверхностей на плоскость проекций π_4, параллельную их общей плоскости симметрии α. В пересечении очерков найдем проекции высшей (B_1'') и низшей H_1'' точек линии пересечения поверхностей. Исходя из принадлежности этих точек поверхности конуса, найдем их проекции в исходной системе плоскостей.

Видимость горизонтальной проекции линии пересечения определяет сфера – на ее экваторе находятся точки смены видимости ***A*** и ***C***. Для определения этих и других точек используем общий алгоритм построения точек, принадлежащих линии пересечения двух поверхностей. При этом в качестве поверхностей–посредников используем вспомогательные секущие плоскости γ_1, γ_2, γ_3.

Видимость фронтальной проекции линии пересечения определяет конус – точки смены видимости ***D*** и ***E*** находятся на главном меридиане конуса.

Другими опорными точками линии пересечения являются точки ***M*** и ***N*** – на фронтальной плоскости проекций в этих точках линия пересечения касается очерка сферы. Горизонтальные проекции этих точек определяем в пересечении одноименных проекций главного меридиана сферы и найденной линии пересечения. Фронтальные проекции точек ***M*** и ***N*** находим из условия принадлежности их сфере.

Контрольные вопросы

1. В пределах какой части проекций пересекающихся поверхно – стей получается проекция линии пересечения?

3. Какие точки линии пересечения называют опорными?

4. Каким образом выбирается положение вспомогательных секущих плоскостей?

5. В каком случае высшая и низшая точки линии пересечения могут быть определены точно?

6. Как определяется видимость проекций линии пересечения?

ГЛАВА 11. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими называются задачи, в которых определяют расстояние или угол между геометрическими фигурами или их элементами. К метрическим относятся также задачи на построение угла или отрезка с наперед заданным значением соответственно градусной или линейной величины.

11.1. Определение угла между двумя пересекающимися прямыми

Известно, что если плоскость угла параллельна плоскости проекций, то угол проецируется на нее без искажения. Поэтому если плоскость угла занимает общее положение, то для определения его натуральной величины необходимо одним из способов преобразования чертежа перевести плоскость угла в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. Наиболее рационально использовать для этого способ вращения плоскости угла вокруг линии уровня.

Пример 1. Определить угол между двумя пересекающимися прямыми a и b (рис.136).

Р е ш е н и е. Повернем плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми a и b, вокруг принадлежащей ей горизонтали h так, чтобы плоскость заняла положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. Тогда искомый угол проецируется на эту плоскость без искажения. Точки 1 и 2, принадлежащие оси вращения h, не меняют своего положения в процессе преобразования. Точка A вращается вокруг центра O в плоскости α, перпендикулярной к оси вращения. Зная две проекции радиуса вращения точки A ($A'O'$, $A''O''$), способом прямоугольного треугольника найдем его натуральную величину R, новое положение точки A_1 (A'_1, A''_1). Соединив точку A'_1 с точками $1'$ и $2'$, определим натуральную величину угла φ между заданными пересекающимися прямыми.

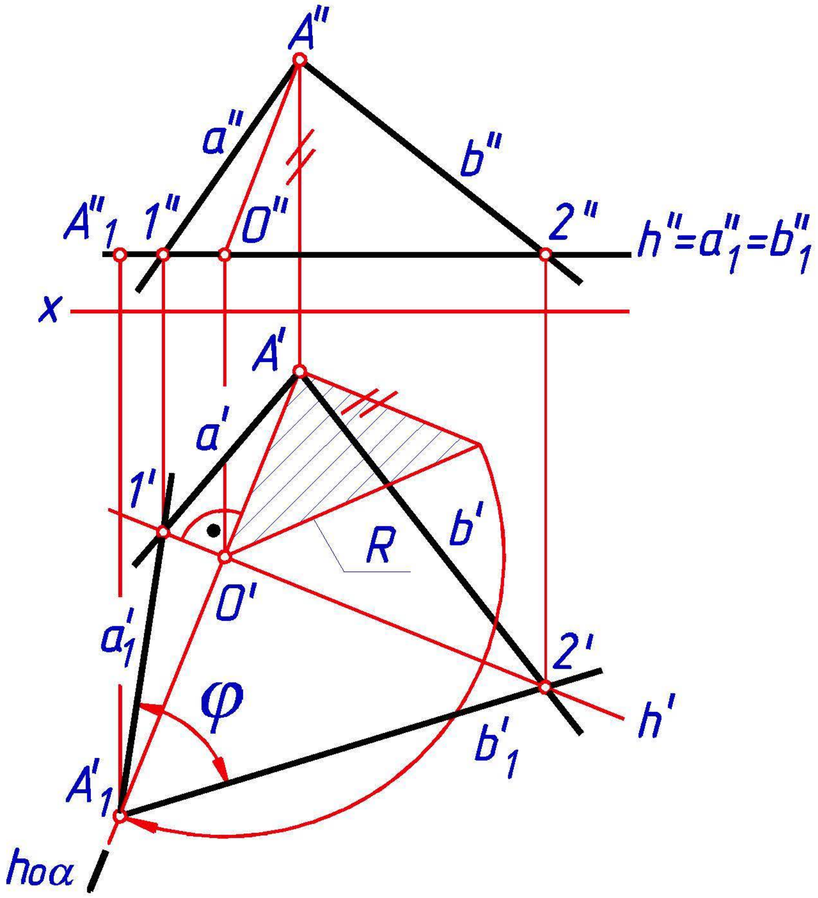


Рис. 136

11.2. Определение угла между двумя скрещивающимися прямыми

Мерой угла между двумя скрещивающимися прямыми служит плоский угол между двумя прямыми, проведенными из произвольной точки пространства параллельно данным скрещивающимся прямым.

Алгоритм решения задачи:

1. Взять в пространстве произвольную точку ***M***.
2. Через точку ***M*** провести две пересекающиеся прямые, параллельные двум заданным скрещивающимся прямым.
3. Определить натуральную величину плоского угла между проведенными прямыми.

11.3. Определение угла между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Решение этой задачи значительно упрощается, если определить не угол между прямой и плоскостью (φ^o), а γ^o – острый угол между прямой и перпендикуляром, опущенным из любой точки прямой на плоскость: $\varphi^o = 90^o - \gamma^o$ (рис. 137).

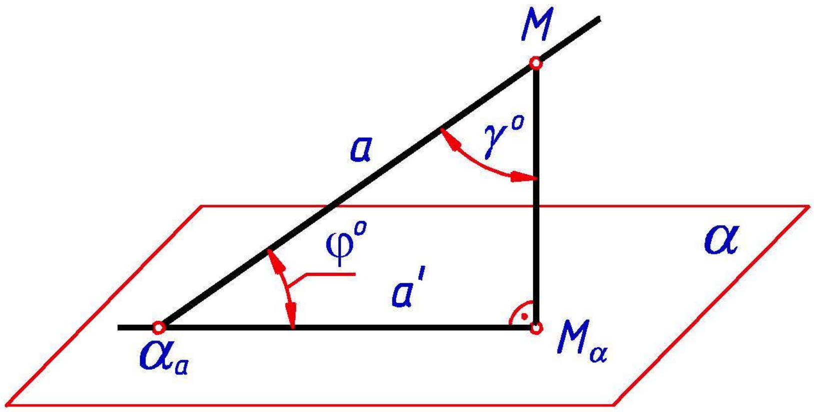


Рис.137

Алгоритм решения задачи :

1. На прямой выбрать произвольную точку ***M***.
2. Через точку ***M*** провести прямую, перпендикулярную плоскости.
3. Используя один из способов преобразования чертежа определить натуральную величину угла γ – острого угла между заданной и проведенной прямыми.
4. Определить искомую величину угла между прямой и плоскостью: $\varphi^o = 90^o - \gamma^o$.

Пример 2. Определить величину угла φ^o между прямой ***a*** и плоскостью α, заданной треугольником ***ABC*** (рис. 138).

Р е ш е н и е. Строим проекции фронтали ***f*** и горизонтали ***h*** плоскости α. На прямой ***a*** выбираем произвольную точку ***M***, из которой опускаем перпендикуляр ***b*** на плоскость α ($b' \perp h'$; $b'' \perp f''$).

Величину угла $\boldsymbol{\gamma}^{o}$ между прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определим способом вращения вокруг линии уровня. Искомая величина угла между прямой $\boldsymbol{a}$ и плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ равна: $\boldsymbol{\varphi^{o} = 90^{o} - \gamma^{o}}$.

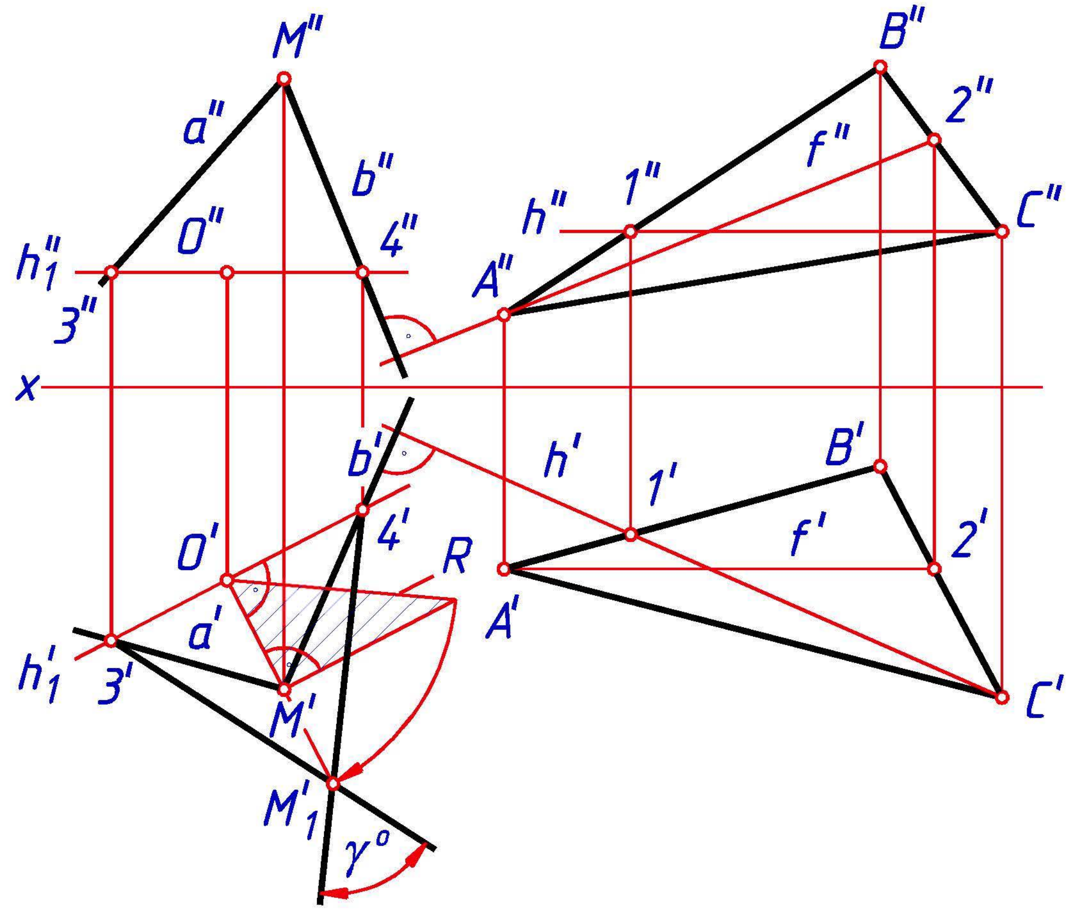


Рис.138

11.4. Определение угла между двумя плоскостями

Мерой угла между двумя плоскостями $\boldsymbol{\varphi^{o}}$ *служит линейный острый угол, полученный от пересечения граней двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру.*

Если ребро двугранного угла известно, то для определения величины угла необходимо преобразовать чертеж так, чтобы ребро заняло проецирующее положение (рис.139). В этом случае обе грани проецируются на плоскость $\boldsymbol{\pi_5}$ в виде отрезков, острый угол между которыми равен искомому углу $\boldsymbol{\varphi^{o}}$ между двумя плоскостями.

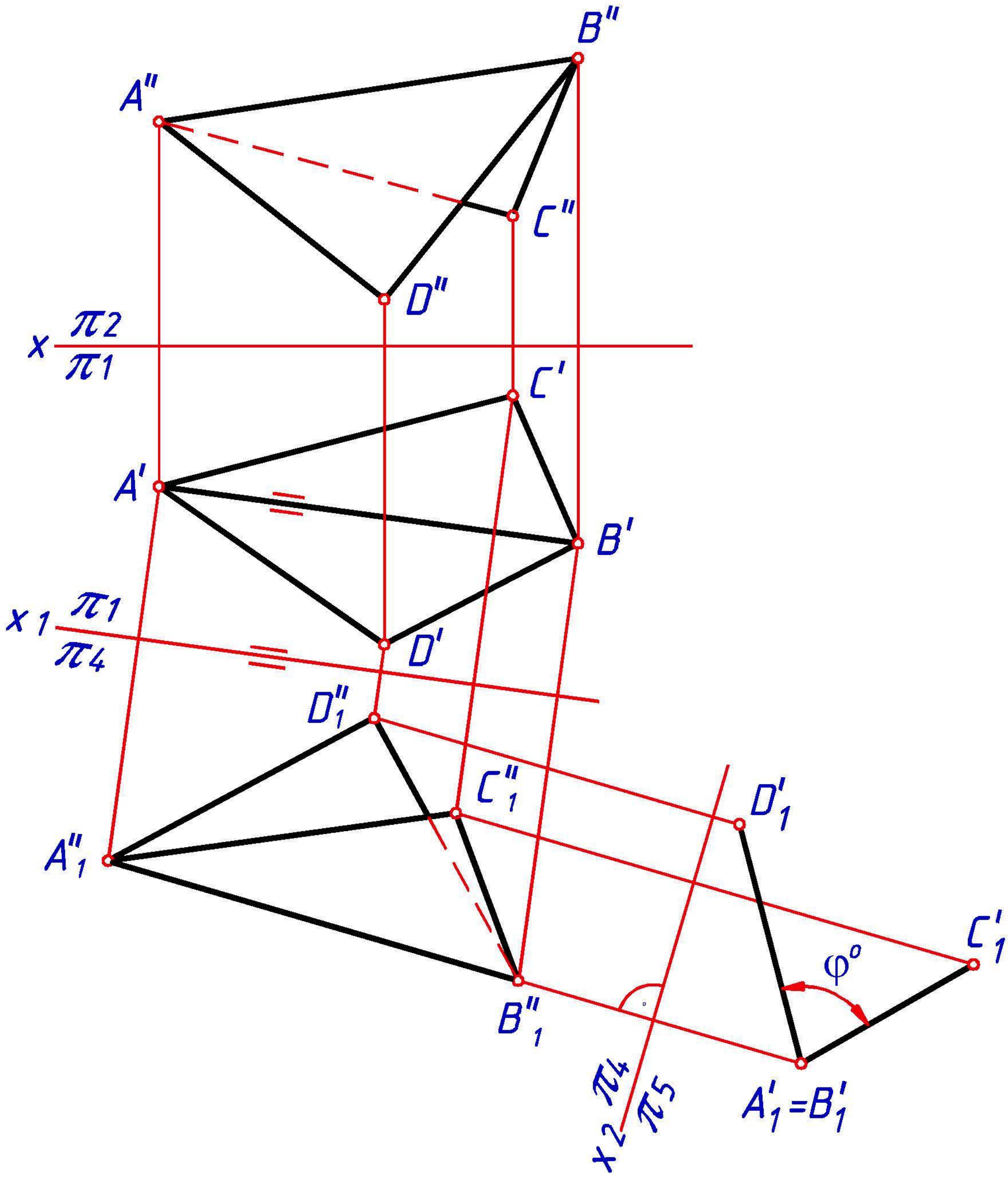


Рис.139

Если ребро двугранного угла неизвестно, то в этом случае угол $\boldsymbol{\varphi^{o}}$ между двумя плоскостями проще определить как острый угол между двумя прямыми, проведенными из произвольной точки пространства перпендикулярно к заданным плоскостям (рис.140). Углы $\boldsymbol{\varphi^{o}}$ равны между собой, так как стороны углов взаимно перпендикулярны.

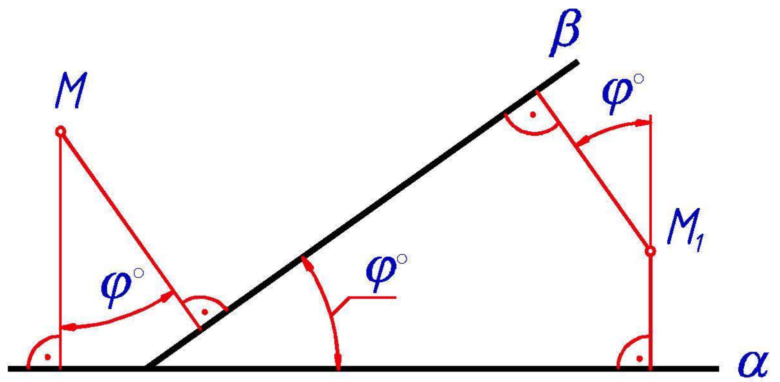


Рис.140

Пример 3. Определить угол $\boldsymbol{\varphi^o}$ между двумя плоскостями $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ **(*m* // *n*)** (рис.141).

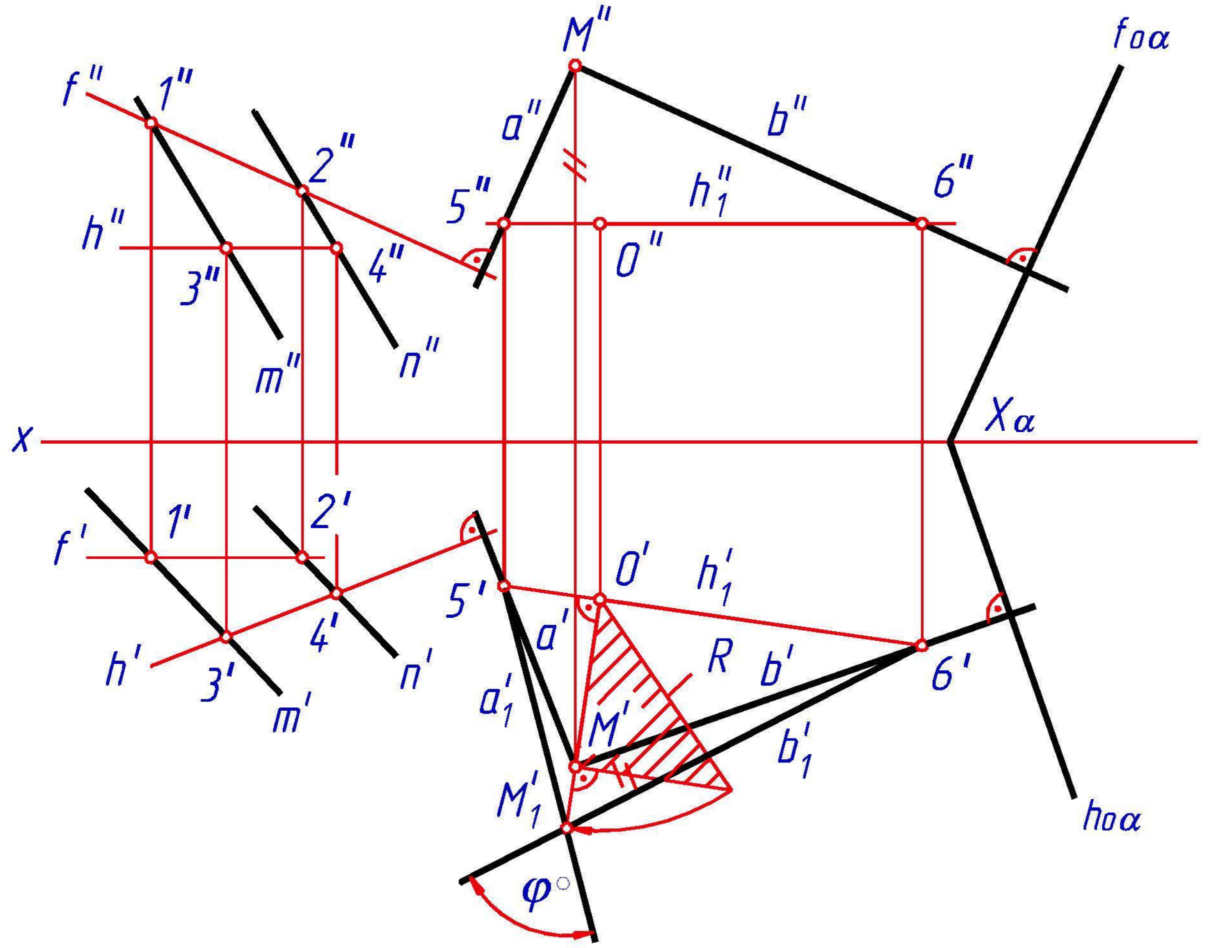


Рис. 141

Р е ш е н и е. Направление горизонтали и фронтали плоскости α известно, так как она задана следами. Построим горизонталь h и фронталь f плоскости β. Из точки M проведем перпендикулярно к заданным плоскостям прямые a ($a' \perp h'$; $a'' \perp f''$) и b ($b' \perp h_{o\alpha}$; $b'' \perp f_{o\alpha}$). Далее способом вращения вокруг линии уровня найдем натуральную величину угла φ^o между заданными плоскостями.

11.5. Определение расстояния между двумя геометрическими фигурами

Расстояние между двумя геометрическими фигурами: точкой и прямой, двумя параллельными прямыми, плоскостью и параллельной ей прямой, двумя параллельными плоскостями – измеряется отрезком перпендикуляра между ними. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно отрезку их общего перпендикуляра, оно также равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые.

Для определения натуральной величины расстояния между двумя геометрическими фигурами удобно преобразовать чертеж так, чтобы одна или обе геометрические фигуры заняли проецирующее положение. В этом случае отрезок перпендикуляра между ними проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Пример 4. Определить расстояние от точки A до прямой m, заданной отрезком BC (рис.142).

Р е ш е н и е. Способом замены плоскостей проекций переведем прямую m в проецирующее положение. Для этого сделаем две замены плоскостей проекций: *первую* – новую фронтальную плоскость π_4 выберем перпендикулярно плоскости π_1 и параллельно данной прямой m ($X_1 \parallel m'$), *вторую* – новую горизонтальную плоскость π_5 выберем перпендикулярно плоскости π_4 и прямой m ($X_2 \perp m''_1$).

В системе плоскостей проекций $\pi_4 - \pi_5$ натуральная величина расстояния от точки A до прямой m будет определяться расстоянием между двумя точками: точкой A'_1 и точкой $B'_1=C'_1$, в которую вырождается проекция прямой m.

Так как в системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_4$ прямая m является линией уровня, то используя свойство проекций прямого угла, можно найти точку K – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую m.

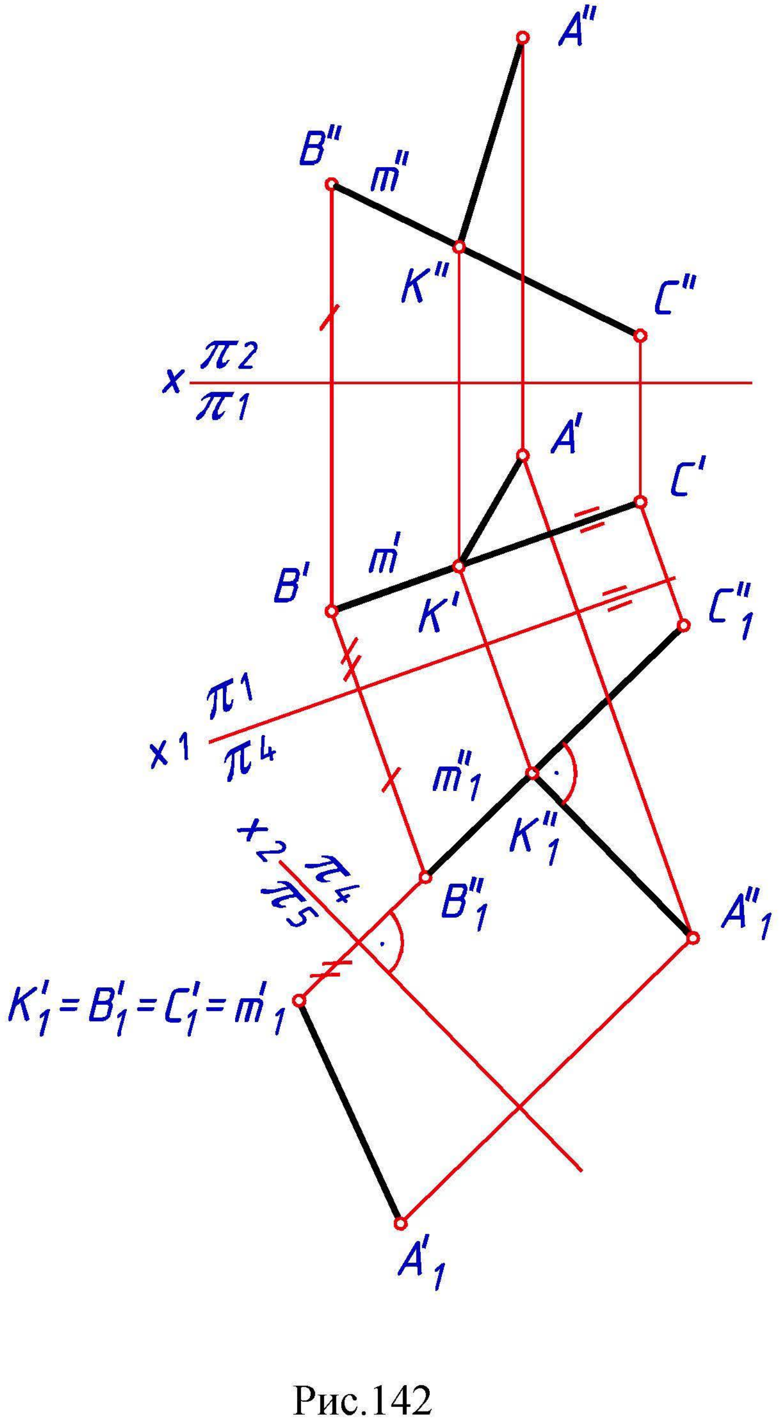


Рис.142

Пример 5. Определить расстояние от точки $\boldsymbol{D}$ до плоскости, заданной треугольником $\boldsymbol{ABC}$ (рис.143).

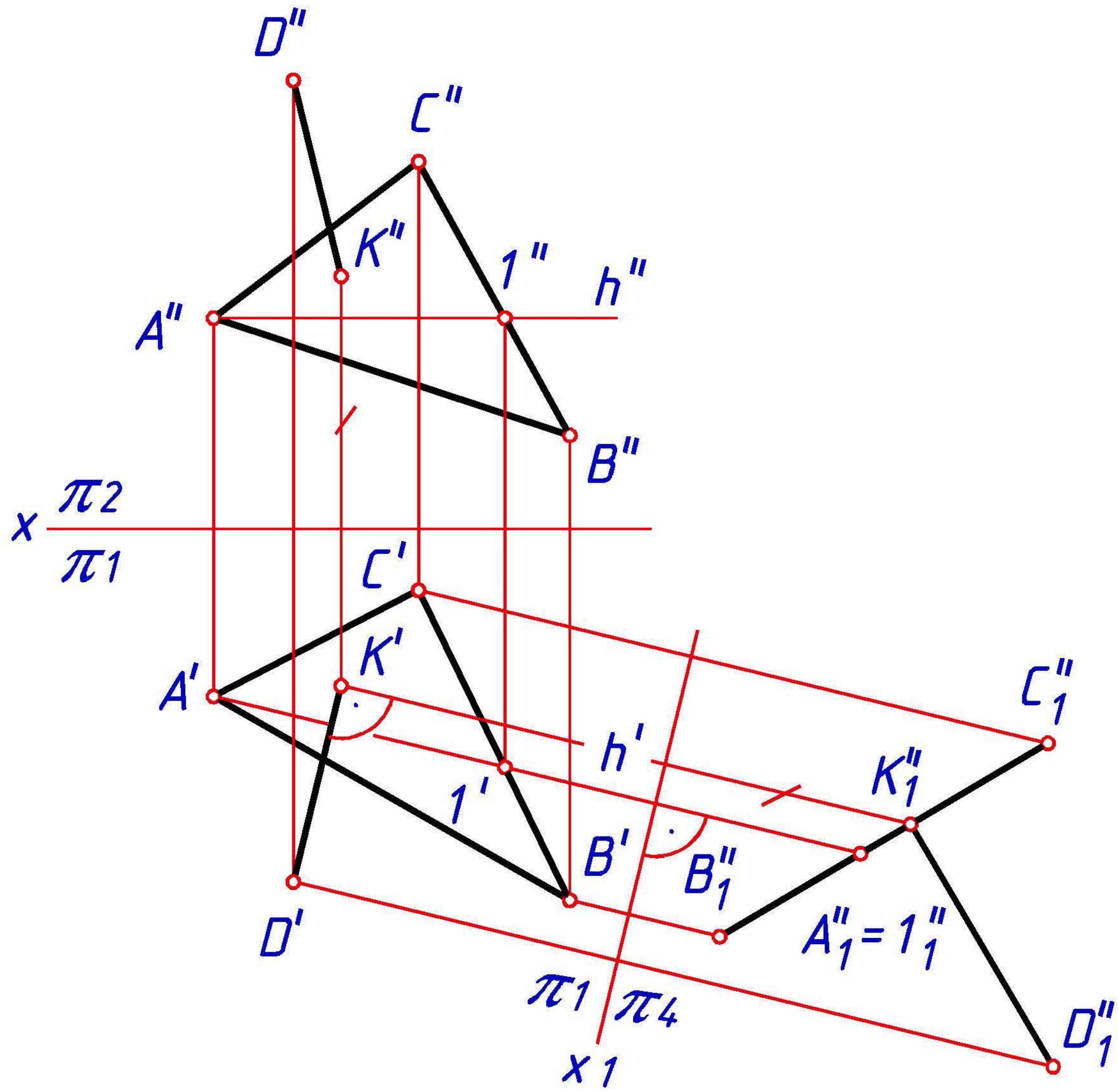


Рис.143

Р е ш е н и е. Введем новую плоскость $\boldsymbol{\pi_4}$ так, чтобы плоскость треугольника $\boldsymbol{ABC}$ в системе плоскостей проекций $\boldsymbol{\pi_1} - \boldsymbol{\pi_4}$ заняла проецирующее положение. Для этого построим новую ось $\boldsymbol{X_1}$ перпендикулярно горизонтали плоскости треугольника $\boldsymbol{ABC}$. В системе плоскостей $\boldsymbol{\pi_1} - \boldsymbol{\pi_4}$ найдем проекции точки $\boldsymbol{D''_1}$ и вершин треугольника $\boldsymbol{A''_1}$, $\boldsymbol{B''_1}$, $\boldsymbol{C''_1}$. Искомое расстояние определится отрезком $\boldsymbol{D''_1\ K''_1}$ перпендикуляра, проведенным из точки $\boldsymbol{D''_1}$ к прямой, в которую вырождается проекция треугольника на плоскость π_4. Обратными преобразованиями найдем проекции основания K перпендикуляра в исходной системе плоскостей.

Пример 6. Определить расстояние от точки A до плоскости α, заданной ее следами (рис.144).

Р е ш е н и е. Решим задачу способом замены плоскостей проекций. Введем новую плоскость π_4 так, чтобы в системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_4$ плоскость α заняла проецирующее положение $(X_1 \perp h_{0\alpha})$. В системе плоскостей проекций $\pi_1 - \pi_4$ найдем проекции точки A и произвольной точки 1, взятой на фронтальном следе плоскости $f_{0\alpha}$. Соединив точки $X_{1\alpha}$ и $1''_1$, построим проекцию следа $f_{1\alpha}$. Проекция отрезка перпендикуляра $A''_1 K''_1$ определит искомое расстояние от точки A до плоскости α.

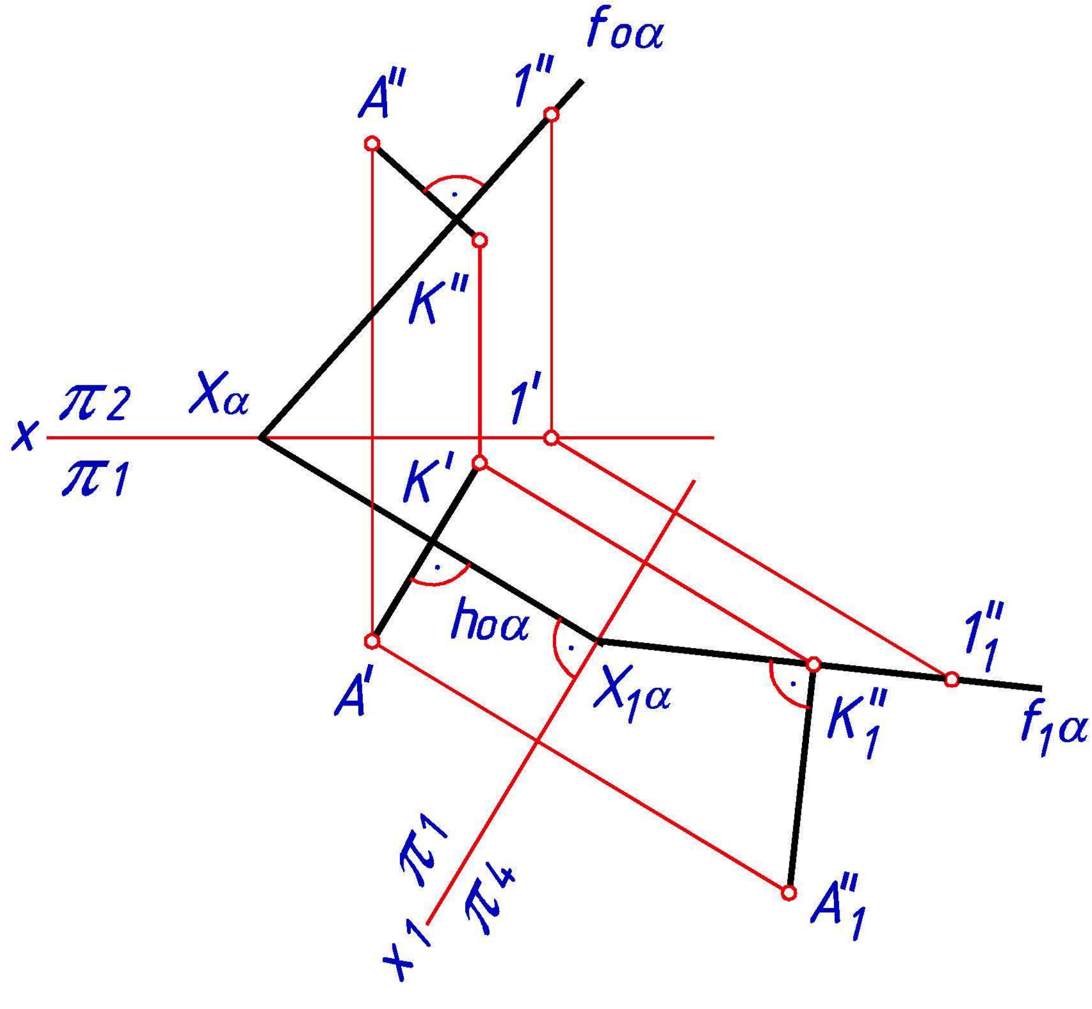


Рис.144

Пример 7. Определить кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми ***AB*** и ***CD*** (рис. 145).

Р е ш е н и е. Дважды сделаем замену плоскостей проекций так, чтобы в системе плоскостей $\pi_4 - \pi_5$ одна из прямых, например ***AB*** , стала проецирующей.

Построим проекции перпендикуляра ***MN*** между прямыми ***AB*** и ***CD,*** учитывая, что $M'_1N'_1 \perp A'_1B'_1$, а $M''_1N''_1 \perp C''_1D''_1$.

Искомое расстояние равно отрезку ***MN***, который проецируется на плоскость π_5 без искажения. Обратными преобразованиями найдем проекции отрезка ***MN*** в исходной системе плоскостей.

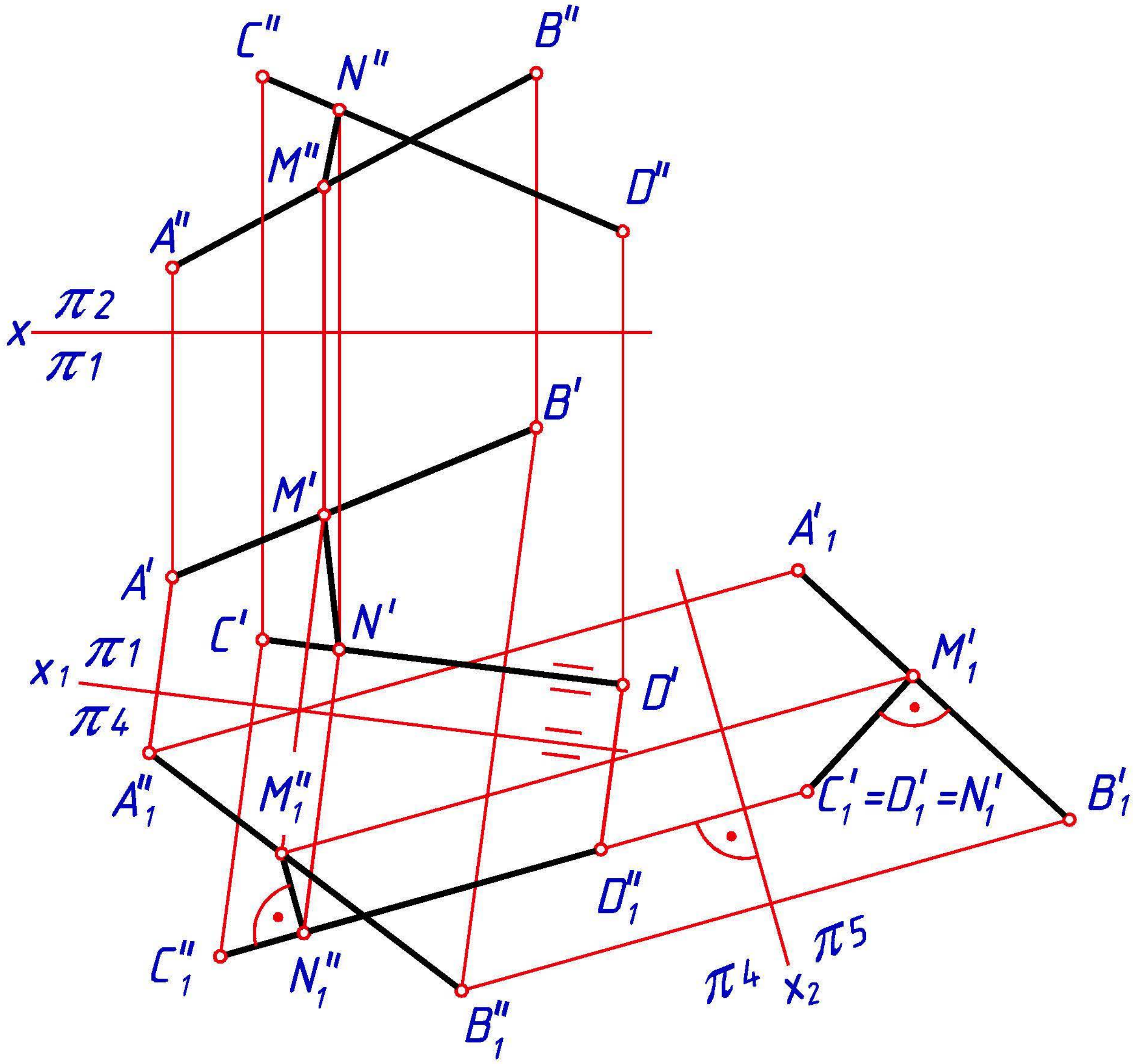


Рис.145

Контрольные вопросы

1. Как определить расстояние от точки до прямой общего положения?
2. Как определить расстояние между параллельными прямыми?
3. Как определить расстояние между параллельными плоскостями?
4. Как найти натуральную величину плоского угла?
5. Как найти натуральную величину угла между прямой и плоскостью?
6. Как найти натуральную величину угла между двумя плоскостями?

ГЛАВА 12. ПЛОСКОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОВЕРХНОСТИ

При проектировании и конструировании поверхностей строятся касательные плоскости и нормали к поверхности. Построение касательной плоскости является частным случаем пересечения поверхности плоскостью.

Плоскостью, касательной к поверхности в некоторой ее точке, называется плоскость, которой принадлежат все прямые, касательные к всевозможным кривым, проведенным на поверхности через данную точку.

В зависимости от вида поверхности элементом ее касания с плоскостью может быть точка, прямая или плоская линия.

На поверхности могут быть точки, к которым нельзя провести касательную плоскость.

Единственную точку касания с плоскостью имеет, например, поверхность сферы, параболоида и эллипсоида вращения.

По прямой линии (образующей) плоскость будет касаться поверхности конуса, цилиндра.

Касаясь в точке с поверхностью однополостного гиперболоида вращения, касательная плоскость при этом пересекает его по двум прямым.

Касательную плоскость удобно задать двумя прямыми, пересекающимися в точке касания. Каждая из этих прямых является касательной к соответствующей кривой линии, проведенной на поверхности через точку касания.

Нормалью к поверхности в данной точке называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Рассмотрим примеры построения касательной плоскости к различным поверхностям.

Пример 1. Построить касательную плоскость α и нормаль d к поверхности цилиндра в точке A (рис.146).

Р е ш е н и е. Элементом касания цилиндрической поверхности с плоскостью будет прямая – образующая BC, проходящая через точку A. Эта прямая – одна из двух пересекающихся прямых, определяющих касательную плоскость α.

В качестве второй прямой возьмем горизонталь ***h***, проведенную через точку ***A*** касательно к окружности, лежащей на поверхности цилиндра и проходящей через точку ***A***. Учитывая, что ***h*** – горизонталь, а ***BC*** – фронталь плоскости α, находим следы плоскости α и проекции нормали ***d*** к поверхности в точке ***A*** ($d' \perp h_{0\alpha}$, $d'' \perp f_{0\alpha}$). Касательная плоскость α является горизонтально проецирующей.

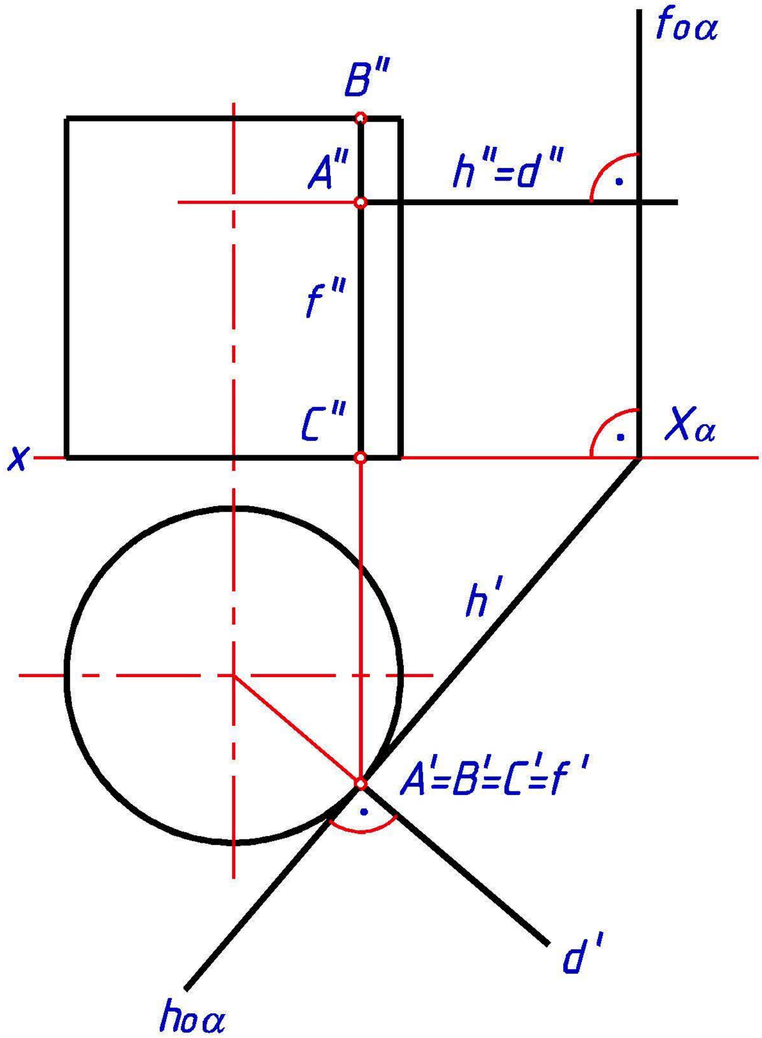


Рис.146

Пример 2. Построить касательную плоскость α и нормаль ***d*** к поверхности прямого кругового конуса в точке ***A*** (рис.147).

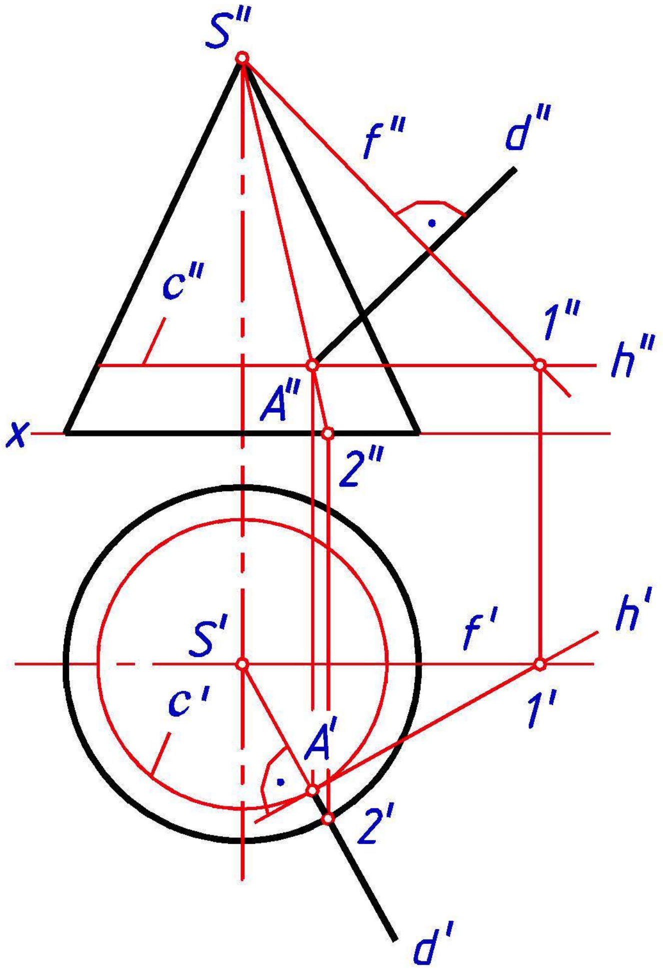


Рис.147

Р е ш е н и е. Элементом касания конической поверхности с плоскостью будет прямая – образующая ***S2,*** проходящая через точку ***A***. На поверхности конуса через точку ***A*** проводим окружность ***c***, лежащую в горизонтальной плоскости.

Одной из двух пересекающихся прямых, задающих касательную плоскость будет образующая ***S2***, другой – касательная ***h*** (горизонталь плоскости α), проведенная через точку ***A*** к окружности ***c***. Для построения нормали к поверхности в точке ***A*** необходимо найти и проекции фронтали плоскости α. Фронталь ***f*** проведем через вершину конуса ***S***. Ее горизонтальная проекция f' известна ($f' \parallel X$). Фронтальную проекцию фронтали f'' определим, найдя проекции точки ***1*** ее пересечения с горизонталью. Построим нормаль ***d*** к поверхности в точке ***A*** ($d' \perp h'$, $d'' \perp f''$).

Пример 3. Построить плоскость **α**, касательную к поверхности сферы в точке ***A*** (рис.148) .

Р е ш е н и е. Проще сначала построить нормаль ***d*** в точке ***A*** сферы, так как она проходит через точку ***A*** и центр сферы ***O***. Затем через точку ***A*** построим горизонталь ***h (h'' || X; h'⊥ d')*** и фронталь ***f (f ' || X; f ''⊥ d'')*** касательной плоскости **α**.

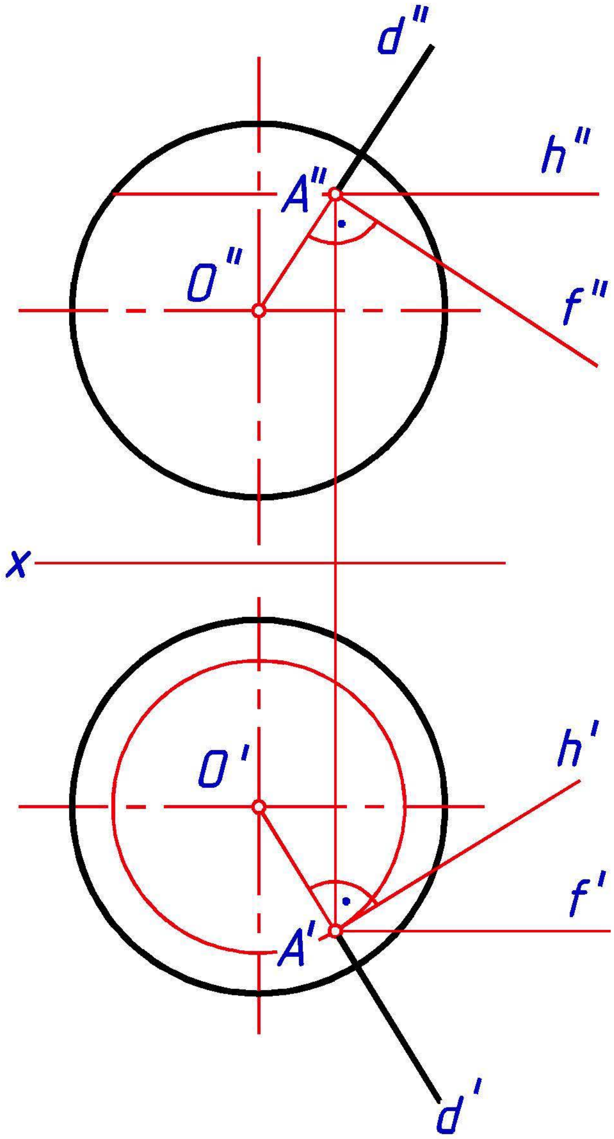


Рис.148

Контрольные вопросы

1. Как построить плоскость, касательную к поверхности в некоторой ее точке?
2. Что называется нормалью к поверхности?
3. Что может являться элементом касания плоскости с поверхностью открытого тора?
4. Как построить плоскость, касательную к сфере в какой-либо точке на сфере?
5. Как построить плоскость, касающуюся конуса и сферы?

ГЛАВА 13. РАЗВЕРТКА КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим поверхность как гибкую, нерастяжимую пленку. Если представленную таким образом поверхность можно путем изгибания совместить с плоскостью без складок и разрывов, то поверхность называют развертываемой.

Разверткой поверхности называется плоская фигура, полученная совмещением данной поверхности с плоскостью без складок и разрывов.

К развертываемым относятся гранные поверхности, например пирамида, призма и следующие кривые линейчатые поверхности: цилиндрические, конические, торсы.

Разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса $\boldsymbol{R}$ и высотой $\boldsymbol{H}$ является прямоугольник с размерами сторон $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{2\pi R}$ (рис.149).

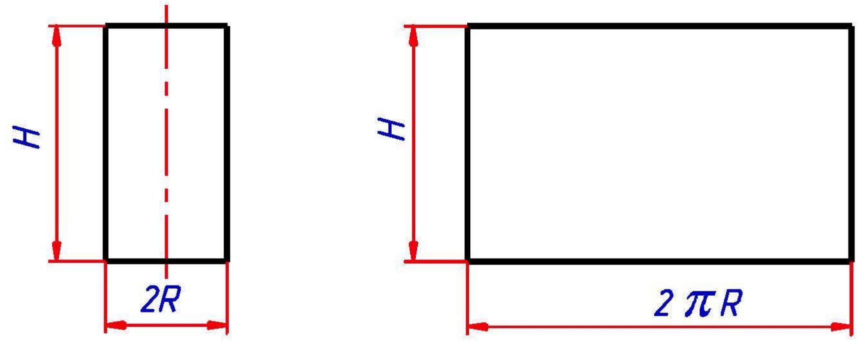


Рис.149

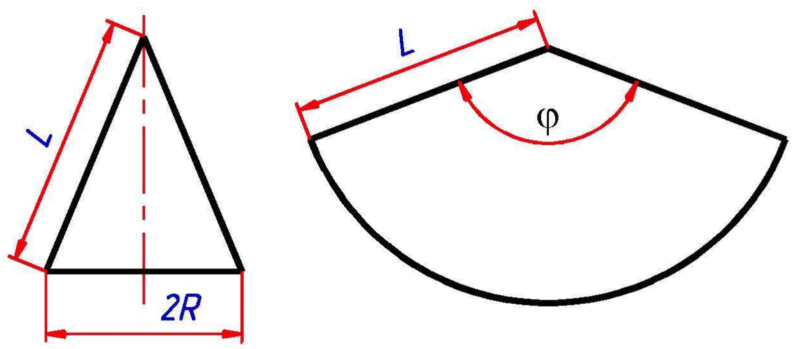


Рис.150

Разверткой боковой поверхности прямого кругового конуса является сектор радиуса ***L*,** центральный угол которого $\varphi^\circ = \dfrac{360^\circ R}{L}$, где ***R*** – радиус окружности основания конуса; ***L*** – длина образующей конуса (рис.150).

Для построения разверток других поверхностей используют различные способы, некоторые из них мы рассмотрим.

Развертки бывают *точные, приближенные и условные*.

Точные развертки можно построить только для развертываемых поверхностей. Построение точных разверток кривых развертываемых поверхностей сложно, поэтому обычно строят их приближенные развертки. Сущность построения приближенных разверток заключается в том, что кривую поверхность аппроксимируют гранной поверхностью, например коническую – пирамидой, цилиндрическую – призмой.

Условные развертки строят для неразвертываемых поверхностей. Для этого данная поверхность аппроксимируется отсеками развертывамой поверхности – гранной, цилиндрической, конической.

13.1. Основные свойства развертки поверхности

Если рассматривать поверхность и ее развертку как два множества точек, то между этими множествами устанавливается взаимно – однозначное соответствие; т.е. каждой точке на поверхности соответствует единственная точка на развертке и наоборот. Отсюда вытекают основные свойства развертки:

1. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой.

2. Замкнутая линия на поверхности и соответствующая ей линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

3. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими линиями на развертке.

4. Прямой на поверхности соответствует также прямая на развертке.

5. *Параллельным прямым на поверхности соответствуют также параллельные прямые на развертке.*

13.2. Приближенная развертка развертываемых поверхностей

Построение приближенных разверток развертываемых кривых поверхностей (конических, цилиндрических, торсовых) сводится к построению точных разверток гранных поверхностей, вписанных в данные поверхности или описанных около них.

Алгоритм построения приближенной развертки:

1. Развертываемую поверхность аппроксимируют гранной поверхностью (пирамидой, призмой) .
2. Строят точную развертку гранной поверхности.
3. На развертке ломаная линия (одна или две), аппроксимирующая направляющую поверхности, заменяется плавной кривой.

Пример 1. Построить развертку боковой поверхности наклонного кругового конуса (рис.151).

Р е ш е н и е. Впишем в данную коническую поверхность пирамиду. Для этого окружность основания конической поверхности заменим правильным шестиугольником ***123456***, а боковую поверхность – боковой поверхностью пирамиды с треугольными гранями ***S12, S23,…S61***. Определим натуральные величины ребер пирамиды способом вращения вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через вершину ***S.***

Зная натуральные величины сторон треугольных граней пирамиды, строим развертку ее боковой поверхности. Для этого сначала на свободном поле чертежа откладываем ребро ***S1*** и с помощью засечек строим треугольник ***S12,*** затем к нему последовательно пристраиваем остальные треугольники. Соединяя точки ***4,3,2,1,6,5,4*** плавной линией, получаем приближенную развертку боковой поверхности наклонного кругового конуса.

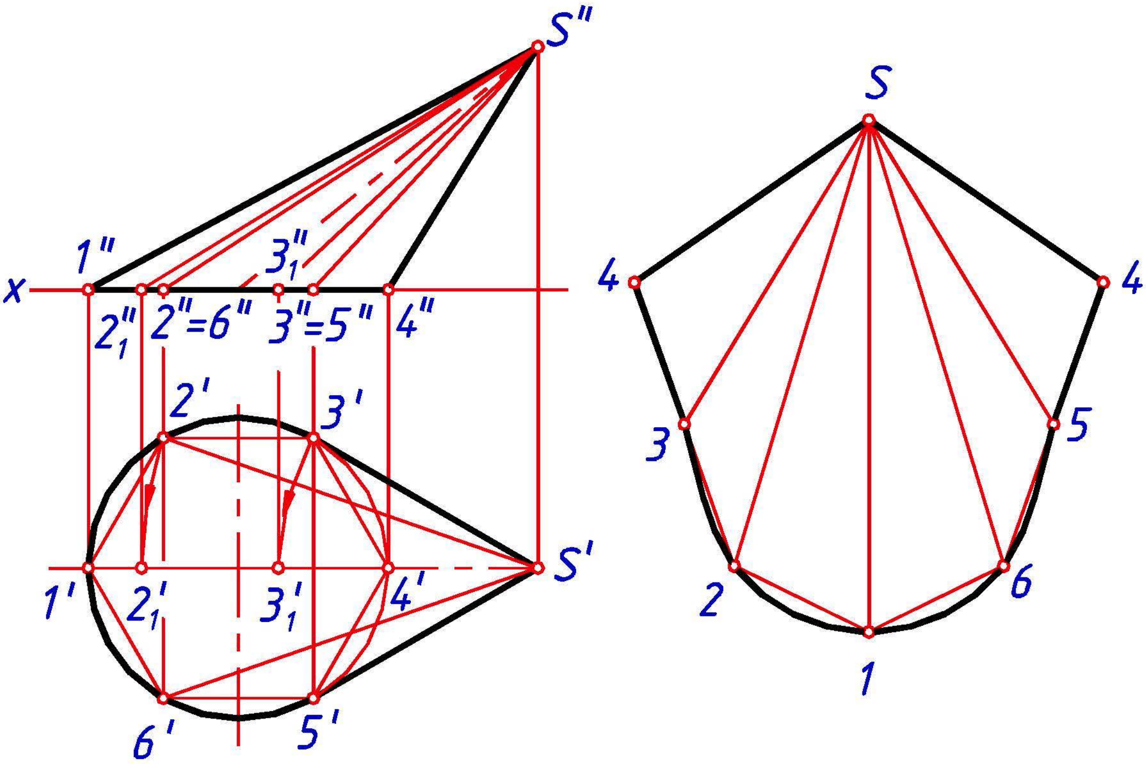


Рис.151

13.3. Условная развертка неразвертываемых поверхностей

Для неразвертываемых поверхностей строят условные развертки. Алгоритм их построения следующий:

1. Поверхность разрезают на несколько частей.
2. Каждую из этих частей аппроксимируют развертываемой поверхностью (гранной, цилиндрической, конической).
3. Строят развертки развертываемых поверхностей, которыми аппроксимируют данную поверхность.

Совокупность этих разверток и будет являться условной разверткой данной поверхности.

Пример 2. Построить условную развертку поверхности сферы (рис.152).

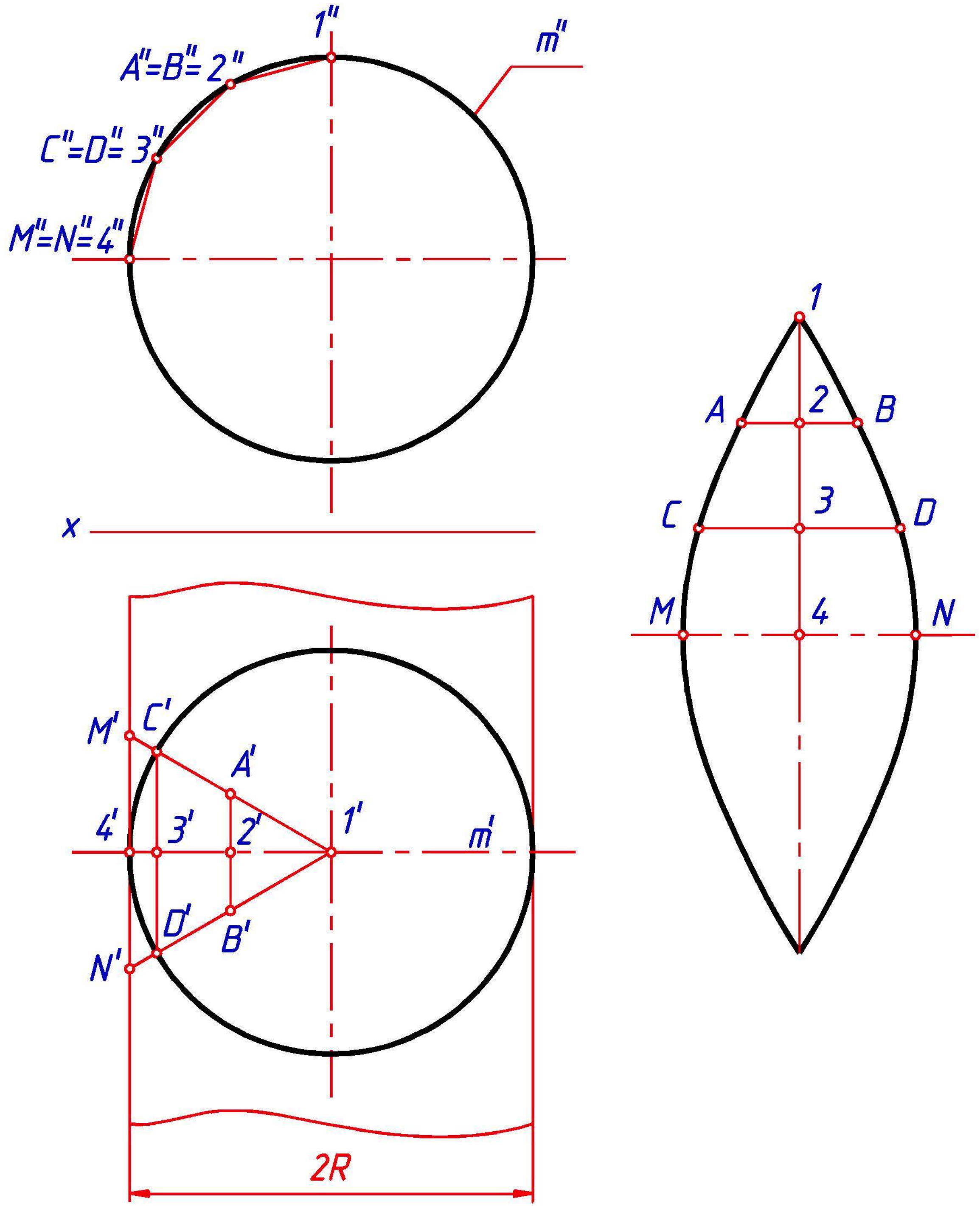


Рис. 152

Р е ш е н и е. Поверхность сферы разрезаем меридиональными плоскостями на равные части (доли), например на шесть.

Построим развертку доли сферы, средним меридианом которой является главный меридиан $\boldsymbol{m}$. Заменяем долю поверхности сферы отсеком цилиндрической поверхности, касающейся ее по главному меридиану (радиус цилиндра равен радиусу сферы). Границами отсека цилиндрической поверхности будут плоскости меридианов, ограничивающие долю поверхности сферы. Разделив дугу ***14*** главного меридиана на ***n*** равных частей, например на три, построим образующие цилиндра ***AB, CD, MN.*** Эти образующие проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Для построения приближенной развертки отсека цилиндрической поверхности дуга ***14*** аппроксимирована ломаной ***1234***, состоящей из трех равных отрезков.

Строим развертку доли сферы. Для этого на свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую и на ней откладываем отрезок ***MN***. Через его середину (точку ***4***) проводим вертикальную прямую, на которой откладываем отрезки ***43, 32, 21***. По обе стороны от вертикальной прямой через точки ***4, 3, 2*** строим соответственно горизонтальные отрезки ***M4 = 4N, C3 = 3D, A2 = 2B***.

Соединив точки ***M, C, A, 1*** и ***N, D, B, 1*** плавными линиями получим фигуру, являющуюся условной разверткой половины доли поверхности сферы. Развертка доли поверхности сферы будет состоять из двух таких, симметрично расположенных фигур.

Полная развертка поверхности сферы в нашем случае будет состоять из разверток шести ее долей.

Контрольные вопросы

1. Какие поверхности относятся к развертываемым ?
2. Для каких поверхностей строятся приближенные и условные развертки?
3. Как построить приближенную развертку наклонного конуса?
4. Как построить условную развертку сферы?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арустамов, Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х. А. Арустамов. – М.: Машиностроение, 1978. – 445 с.
2. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников, М. Я. Громов. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.
3. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособие для вузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов – Огиевский; под ред. В. О. Гордон, Ю. Б. Иванова. – 24-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 272 с.
4. Гордон, В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: учеб. пособие для вузов / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. – М.: Высш. шк., 2000. – 320 с.
5. Иванов, Г. С. Начертательная геометрия: учеб. для вузов / Г. С. Иванов.– М.: Машиностроение, 1995. – 224 с., ил.
6. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – 2-е изд., пераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.
7. Фролов, С. А. Сборник задач по начертательной геометрии/ С. А. Фролов. – М.: – Машиностроение, 1980. – 142 с.
8. Тарасов, Б. Ф. Начертательная геометрия. учеб. для вузов / Б. Ф. Тарасов, Л. А. Дудкина, С. О. Немолотов. – 3-е изд., стер.– СПб.: Лань, 2003. – 231с.
9. Соломонов, К.Н. Начертательная геометрия. учеб. для вузов / К. Н. Соломонов, Е. Б. Бусыгина, О. Н. Чиченева. – М.: • МИСИС • : ИНФРА-М, 2004. – 160 с.

Интернет -источники

10. http://graph.power.nstu.ru/wohlcin/umm/Graphbook/book/index.htm
11. http://traffic.spb.ru/geom/menu.html
12. http://www.informika.ru/text/database/geom/
13. http://agd.mmf.spbstu.ru/Tasks/ToolBook/Book.htm
14. http://innov.ncic.ru/bases/u/showbook.html?id=405

ОГЛАВЛЕНИЕ