IX 1979

1 2 8

ТУ-19-241-77

0

5

студия

ДИАФИЛЬМ

07—3—159

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$a_{n+1}=a_n+$$

$$a_n=a_1+d(n-1)$$

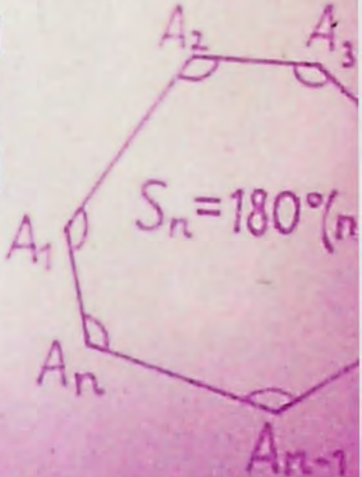
$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

$$b_{n+1}=b_nq$$

$$b_n=b_1q^{n-1}$$

$$S_n=\frac{b_1q^n-b_1}{q-1}$$



$$A(1), A(2), \ldots, A(k), A(k+1), \ldots, A(n), \ldots$$

$$n \in N$$

ДЕДУКЦИЯ И ИНДУКЦИЯ

ОБЩЕЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ОБО ВСЕХ ЭЛЕМЕНТАХ ДАННОГО МНОЖЕСТВА

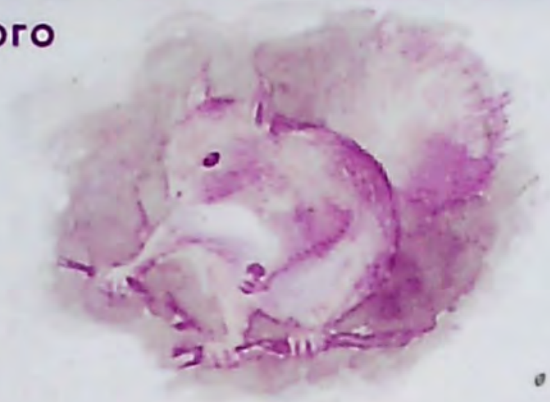
Умозаключение от общего к частному
дедукция

ЧАСТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ОБ ЭЛЕМЕНТЕ ИЛИ О ПОДМНОЖЕСТВЕ ДАННОГО МНОЖЕСТВА

Умозаключение от частного к общему
индукция

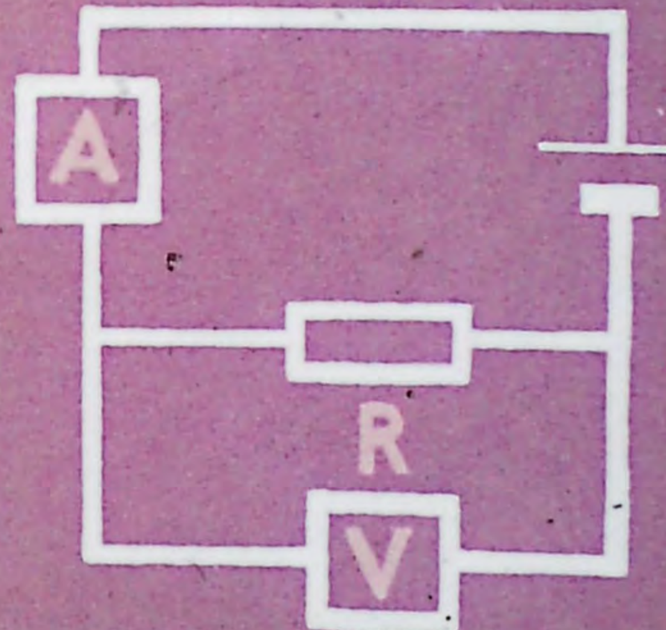
1. У каждого наземного млекопитающего 4 конечности.

2. У каждой собаки 4 лапы.



3. У нашей Жучки 4 лапы.

Утверждение может быть общим по отношению к одному и частным по отношению к другому утверждению.



$J=UR$

Георг Ом открыл свой закон экспериментальным путе
Является такой метод дедуктивным или индуктивным?

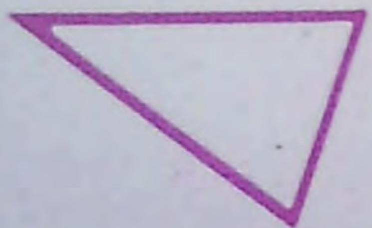
До открытия Австралии европейские натуралисты считали, что бывают только белые лебеди. К индуктивному или к дедуктивному виду относится это рассуждение?

1. Каждое составное четное число первой сотни равно сумме двух простых чисел:

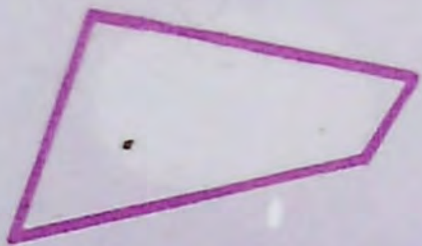
$4=2+2;\ 6=3+3\ \ldots\ 100=3+97.$

2. Если (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, то $a_n=a_1+d(n-1)$.

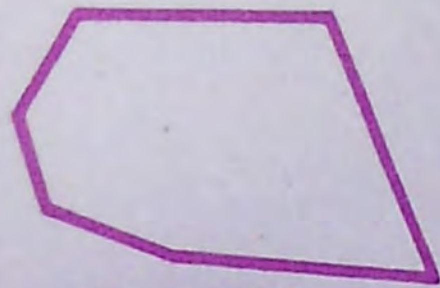
3. Сумма величин внутренних углов n-угольника равна $180°(n-2)$.



$S_3=180°$

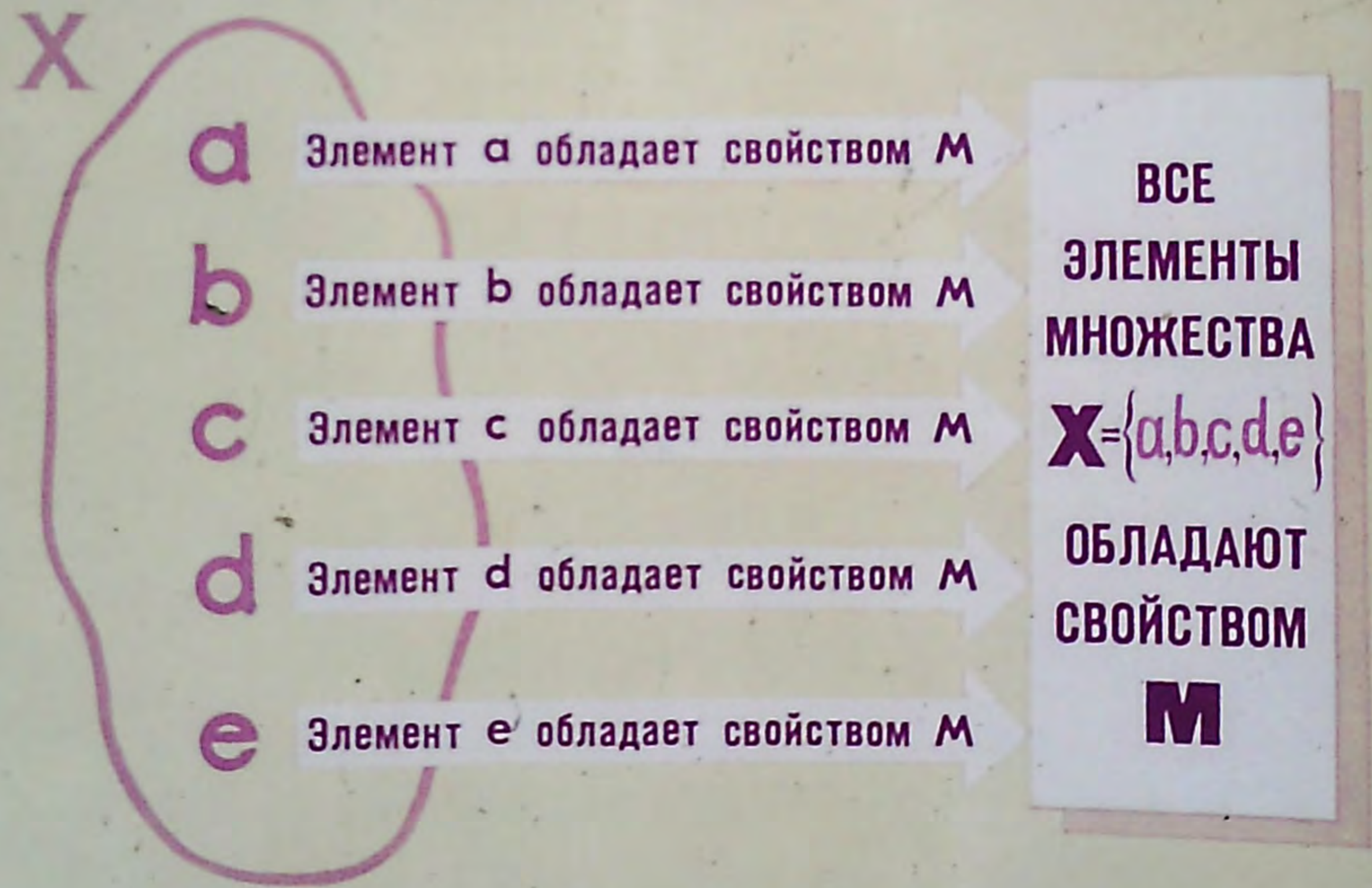


$S_4=360°$

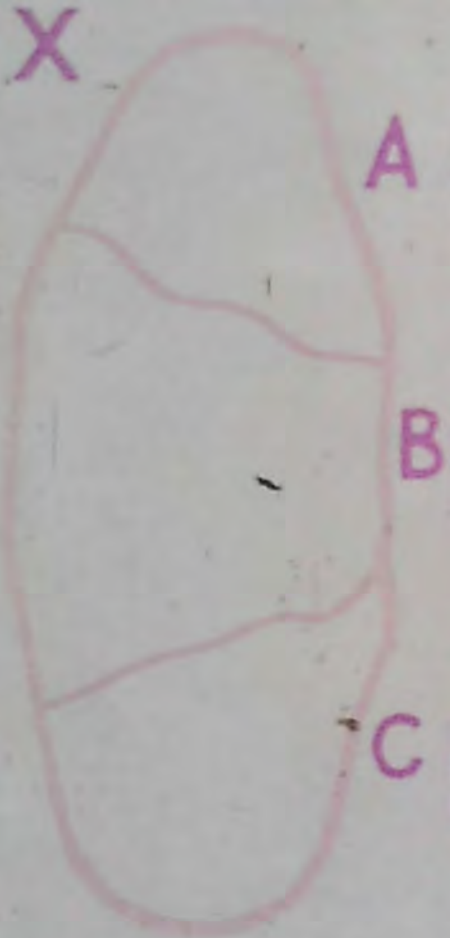


$S_6=720°$

Какое из этих утверждений может быть доказано индукцией?



Полная индукция—доказательство общего утверждения перебором всех частных случаев.



Все элементы множества A обладают свойством M

Все элементы множества B обладают свойством M

Все элементы множества C обладают свойством M

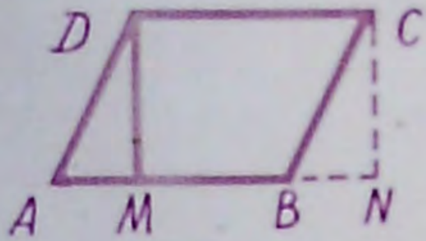
ВСЕ ЭЛЕМЕНТЫ МНОЖЕСТВА $X = A \cup B \cup C$ ОБЛАДАЮТ СВОЙСТВОМ M

Еще один вариант использования полной индукции — рассмотрение подмножеств данного множества.

Теорема: $S_{\square} = a \cdot h_a$

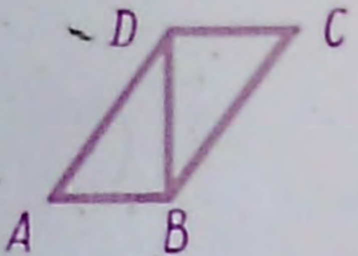
Доказательство:

1



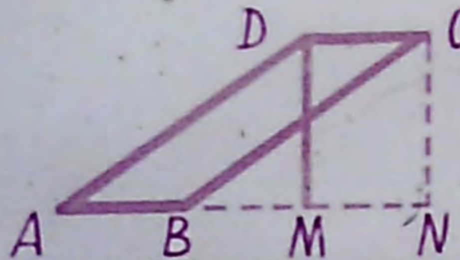
$$S_{ABCD} = S_{ADM} +$$

2



$$S_{ABCD} = S_{ADB} +$$

3



$$S_{ABCD} = S_{ADCN} -$$

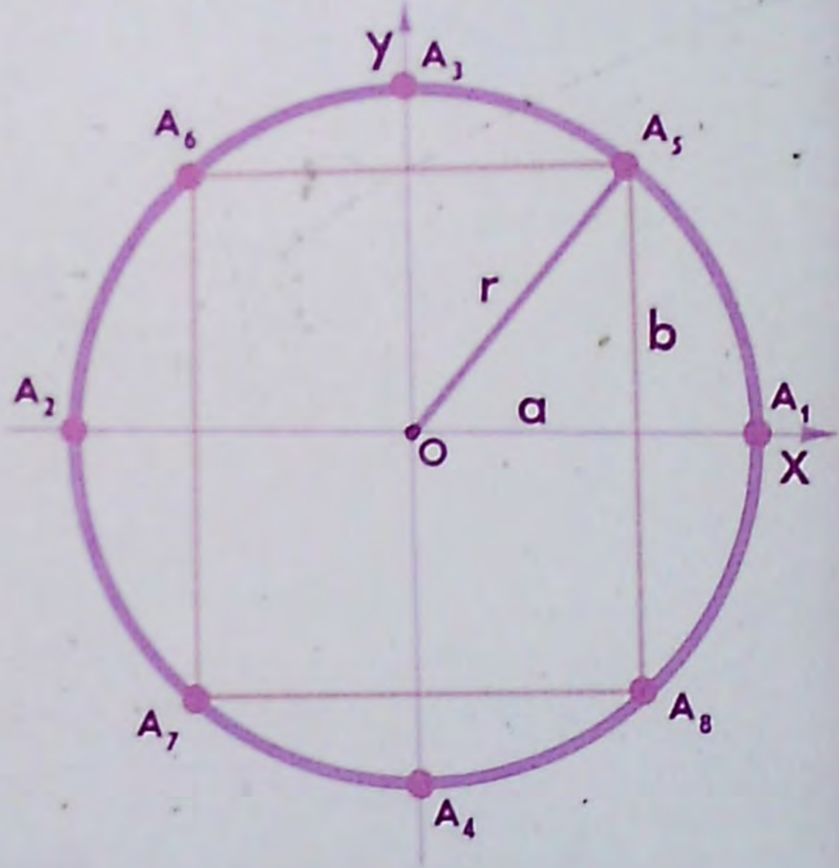
Каким методом проведено доказательство?

Теорема:

Для любой точки окружности с центром O и радиусом r $x^2 + y^2 = r^2$.

Доказательство:

1. Для A_1 и A_2:
   $x^2 + y^2 = r^2 + 0 = r^2$.
2. Для A_3 и A_4:
   $x^2 + y^2 = 0 + r^2 = r^2$.
3. Для остальных точек окружности:
   $x^2 + y^2 = |a|^2 + |b|^2 = r^2$



Объясните, как действует полная индукция при этом доказательстве.

Мы часто пользуемся полной индукцией при решении задач.

Задача:

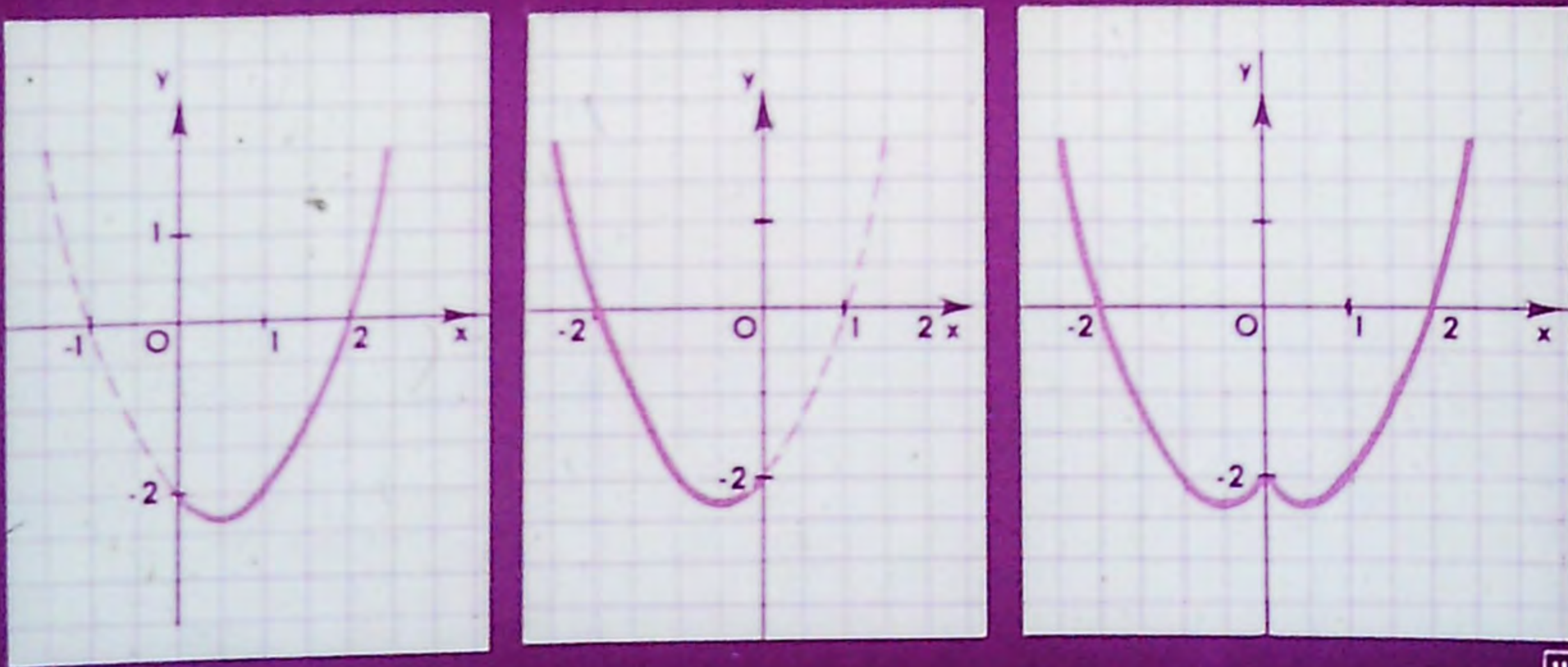
Построить график $y = x^2 - |x| - 2$.

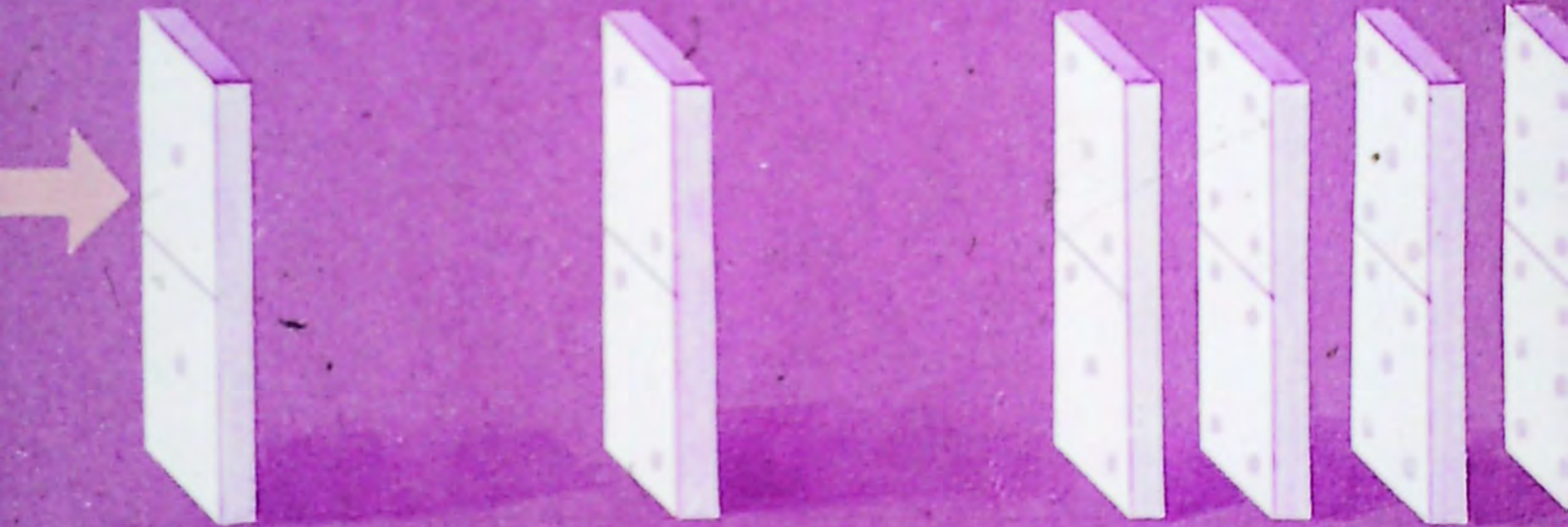
Решение:

1. Если $x \geqslant 0$, то $y = x^2 - x - 2$

2. Если $x < 0$, то $y = x^2 + x - 2$.

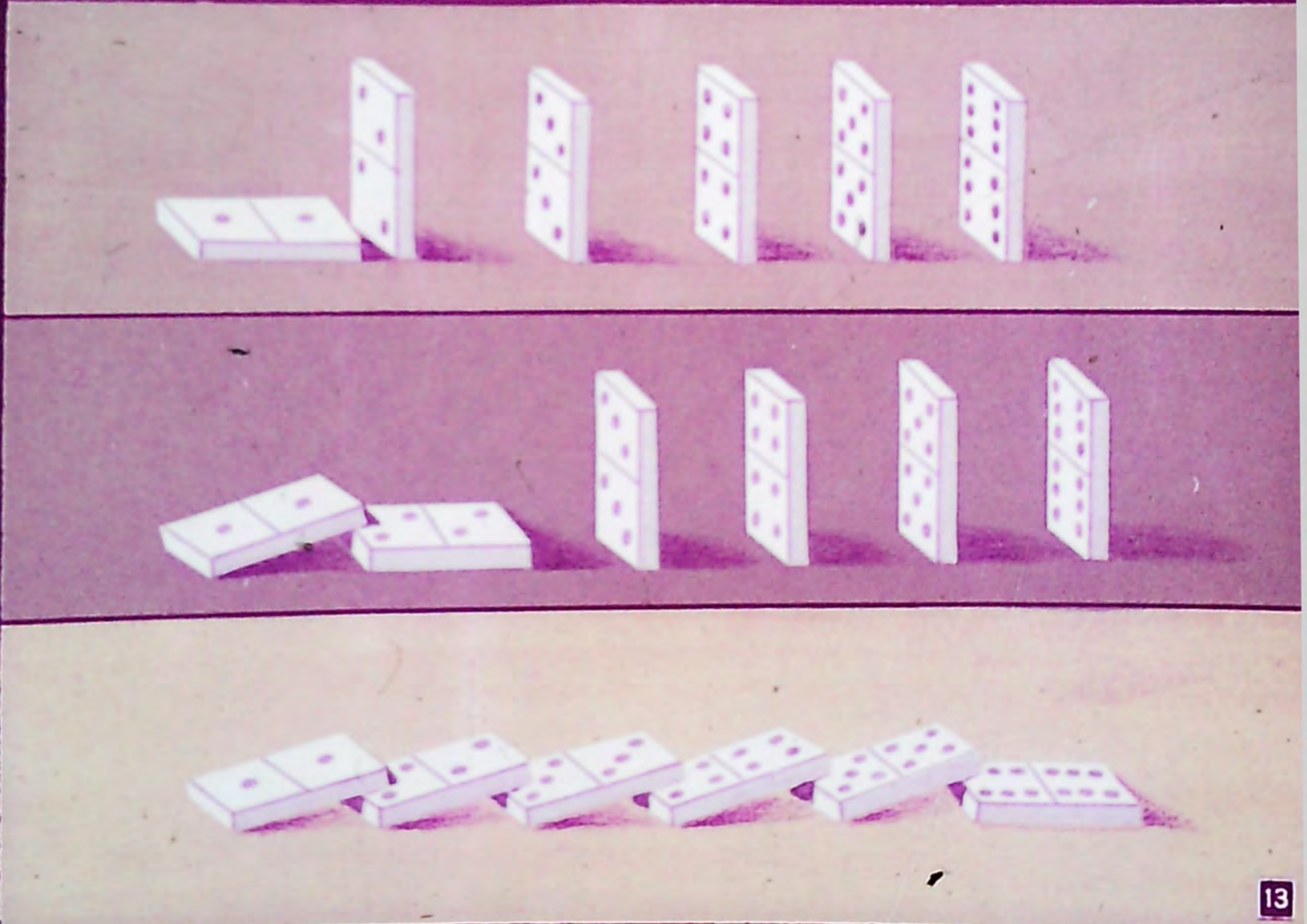
Окончательно получаем:

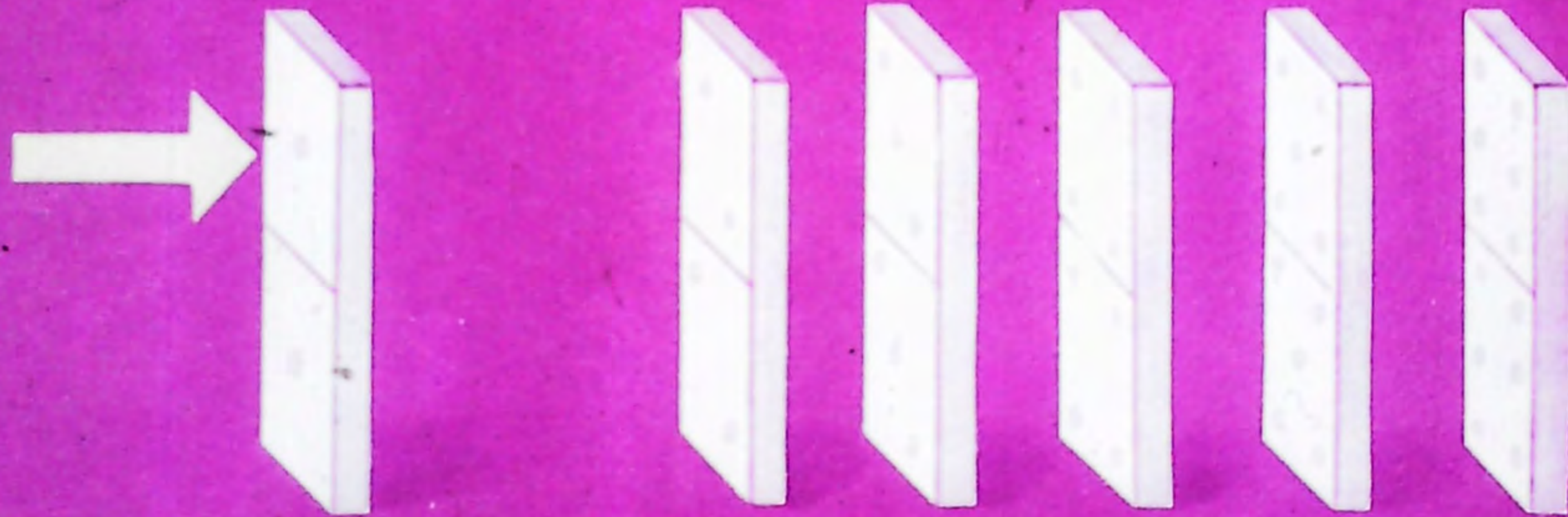




Шесть косточек домино стоят рядом. Если толкнуть третью косточку, она повалит четвертую, та — пятую, а та — шестую. Толкнули первую косточку. Какие косточки упали? Ответьте на вопрос, применяя полную индукцию.

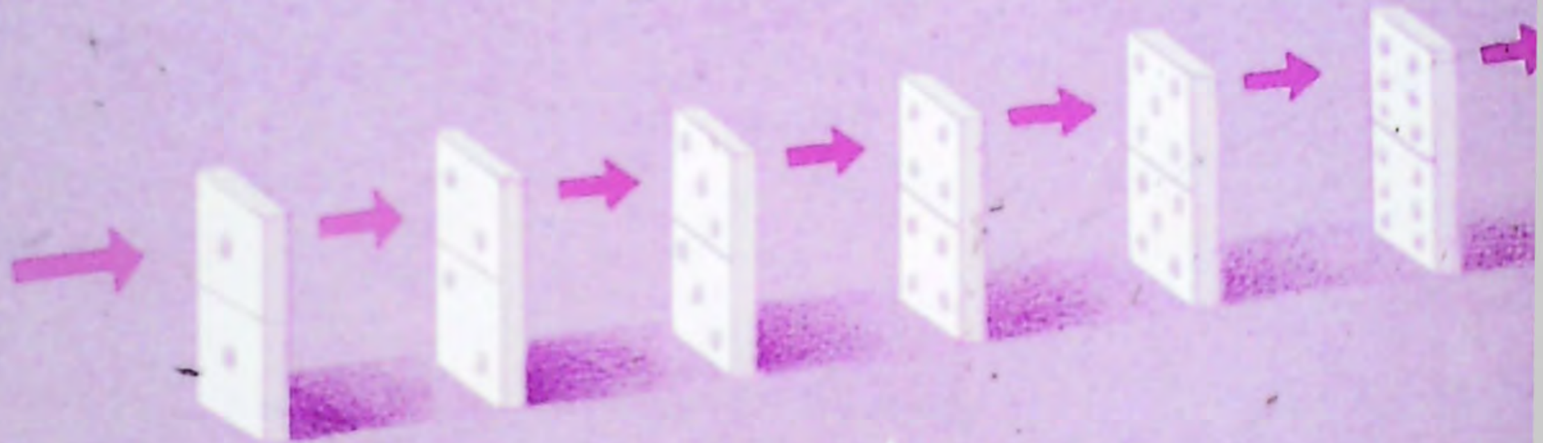
Все возможные случаи рассмотрены ниже. Опишите их словесно.





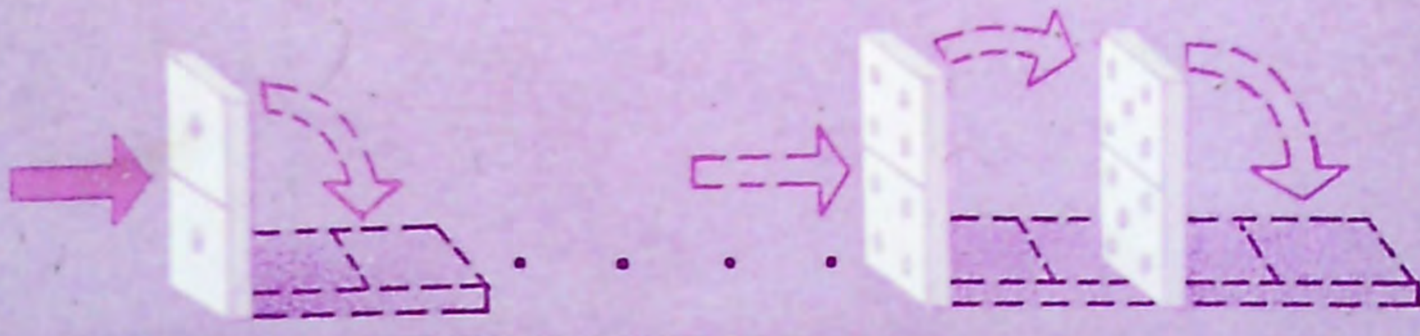
Рассмотрите ту же задачу с дополнительным условием: вторая косточка при падении обязательно толкнет третью.

Пусть каждая косточка при падении толкает следующую. Тогда, толкнув первую косточку, мы заставим упасть все.



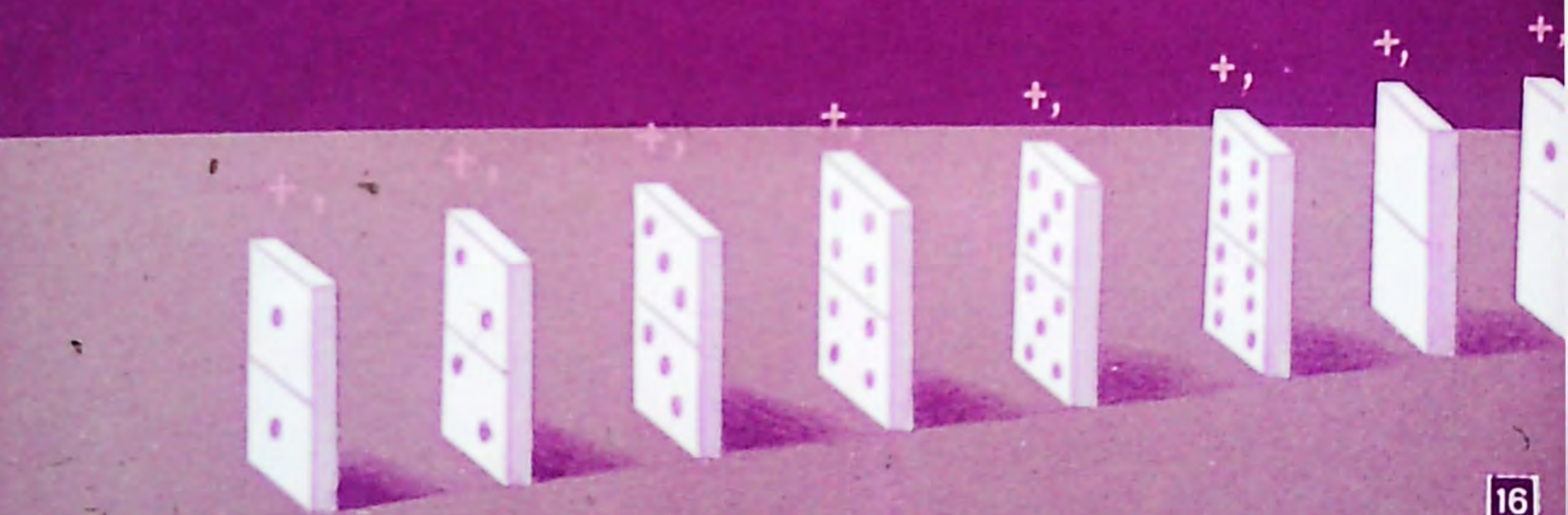
Первая упадет

Если упадет к-я, то упадет и (к+1)-я

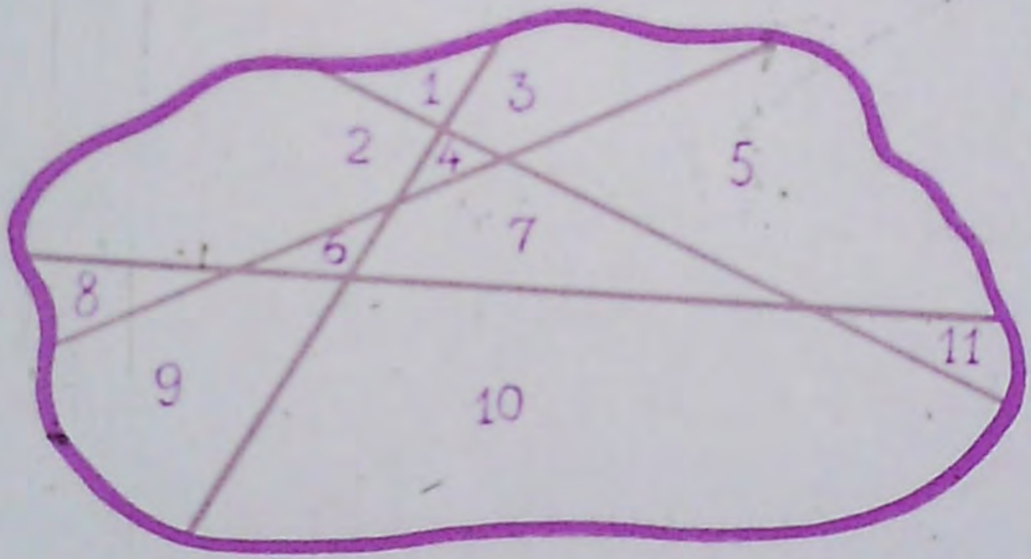


В числовой последовательности первое число положительное и за каждым положительным числом следует положительное.

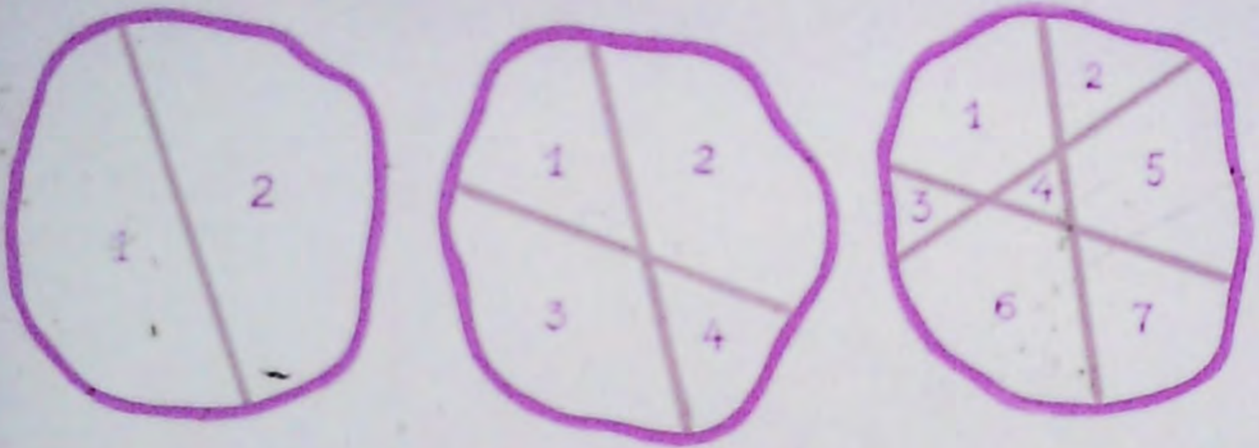
1. Докажите, что третье число положительное.
2. Докажите, что седьмое число положительное.
3. Можно ли доказать, что миллиардное число положительное?
4. Можно ли доказать, что каждое число этой последовательности положительное?



Рассмотрим утверждение: n прямых, в числе которых нет двух параллельных и трёх пересекающихся в одной точке, делят плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей.



Это утверждение можно рассматривать как последовательность утверждений: $x_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.



$$X_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

$X_1 = 2$, $X_2 = 4$, $X_3 = 7$, ...

Последовательность утверждений принято обозначать A(n). В нашем случае A(1) звучит так: $x_1 = 2$. Произнесите утверждение A(2), A(3), A(к).

Пусть утверждение $A(n)$ таково: „n-я косточка домино упадет".
Назовите $A(1)$, $A(k)$, $A(k+1)$.
Известно, что $A(1)$ истинно и что для любого $k \in N$ из $A(k)$ следует $A(k+1)$. Истинно ли $A(n)$ для любого $n \in N$?

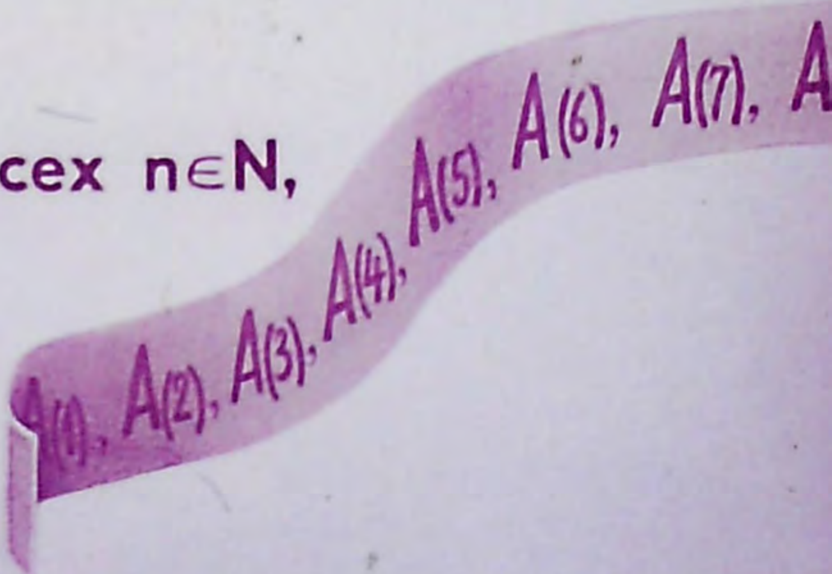
ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

$A(n)$ истинно для всех $n \in N$,

если:

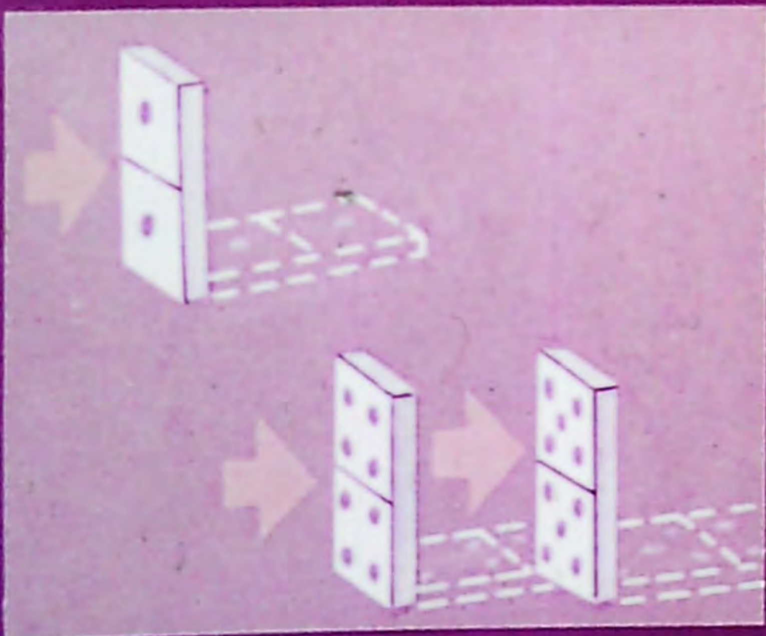
1. $A(1)$ истинно;
2. для любого $k \in N$

($A(k)$ истинно)$\Rightarrow$($A(k+1)$ истинно).



Утверждение $A(n)$ звучит так: в последовательности (x_n) натуральных нечетных чисел $x_n = 2n-1$.

n	1	2	3	4	. . .	n	. . .
x_n	1	3	5	7	. . .	$2n-1$	. . .

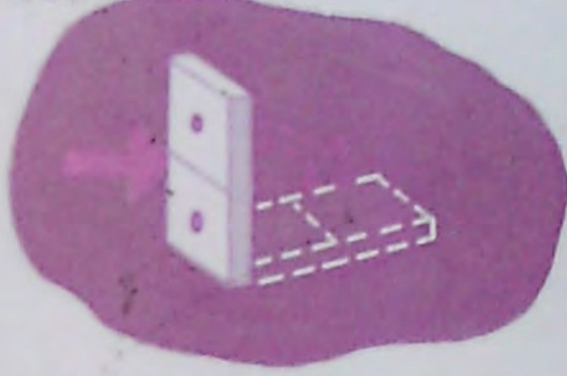


Назовите
$A(1)$, $A(4)$, $A(10)$,
$A(k)$, $A(k+1)$.

Проведите доказательство:
1. $A(1)$ истинно, так как...
2. ($A(k)$ истинно) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ($A(k+1)$ истинно), так как...

Проверьте ваше доказательство.

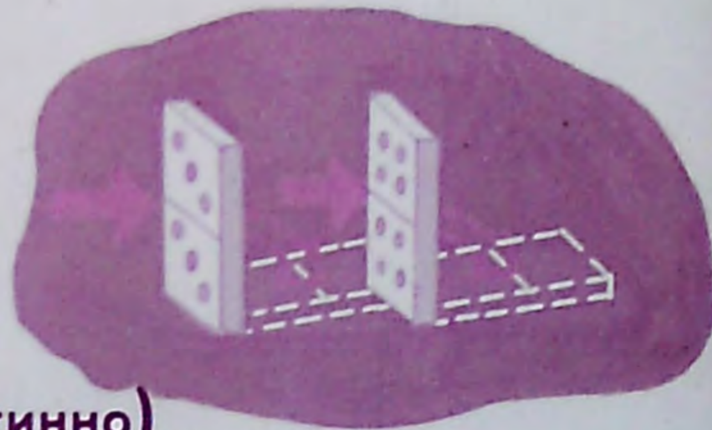
$$\boxed{A(n):\ x_n = 2n - 1}$$



1. $x_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$; $A(1)$ истинно.

2. Пусть $x_k = 2k - 1$;

тогда $x_{k+1} = x_k + 2 = 2(k+1) - 1$.

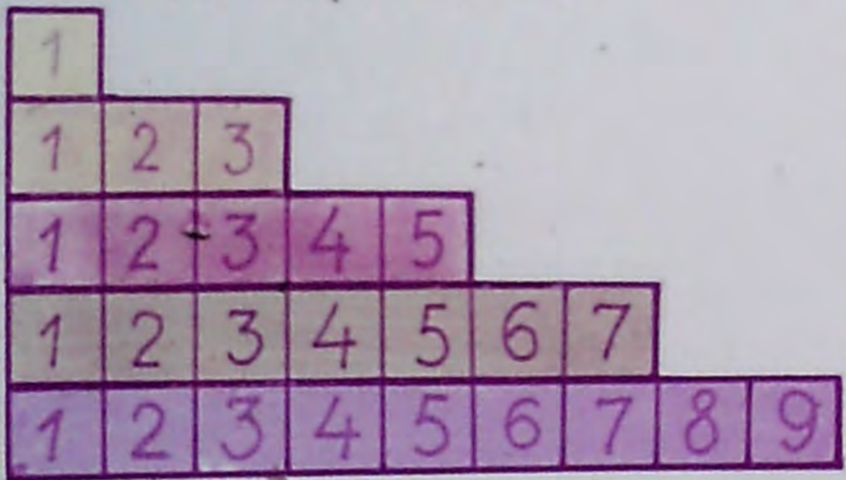


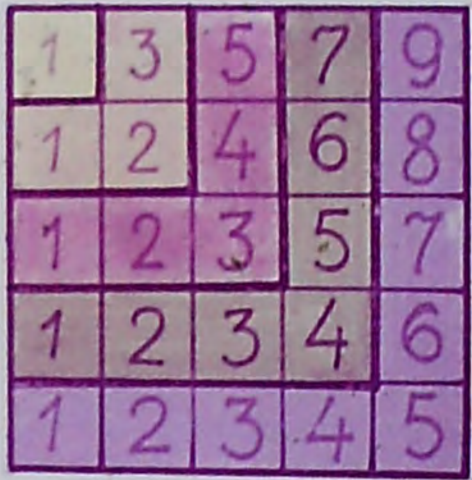
Для любого $k \in N$
$(A(k)$ истинно$) \Rightarrow (A(k+1)$ истинно$)$.

В силу принципа математической индукции, $A(n)$ истинно для любого $n \in N$.

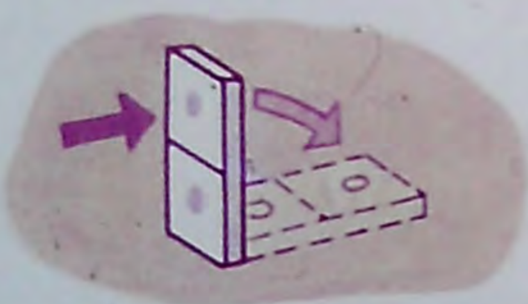
Теорема: Сумма первых n нечетных натуральных чисел равна n^2.

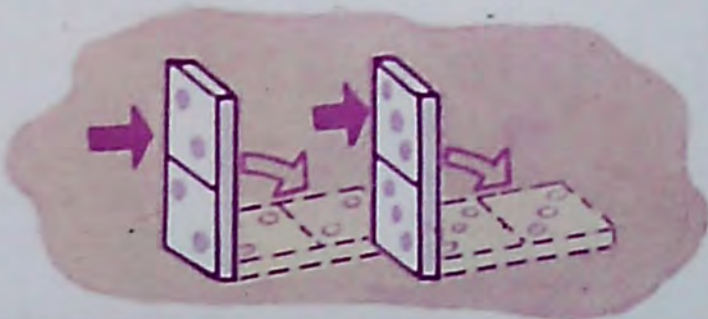
Какое равенство здесь можно обозначить через A(n)? Через A(1), A(к), A(к+1)?





На рисунке подтверждена истинность A(1), ..., A(5).

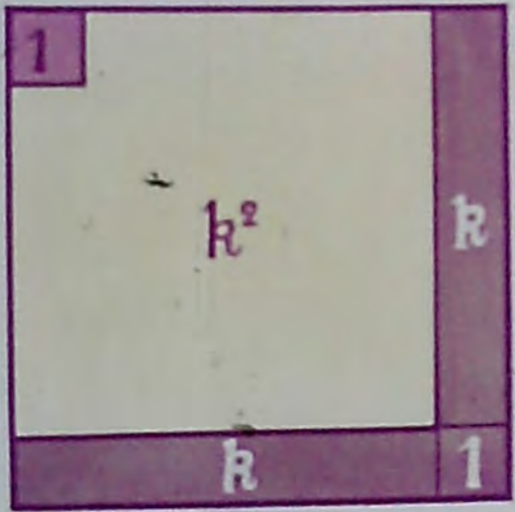




Как доказать истинность A(6)? Наметьте путь доказательства теоремы в целом.

Доказательство:

$A(n)$: $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$



1. $S_1 = 1 = 1^2$;
   $A(1)$ истинно.
2. Пусть для некоторого $k \in N$
   $S_k = k^2$.

Тогда:

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

Для любого $k \in N$

($A(k)$ истинно $\Rightarrow$ ($A(k+1)$ истинно).

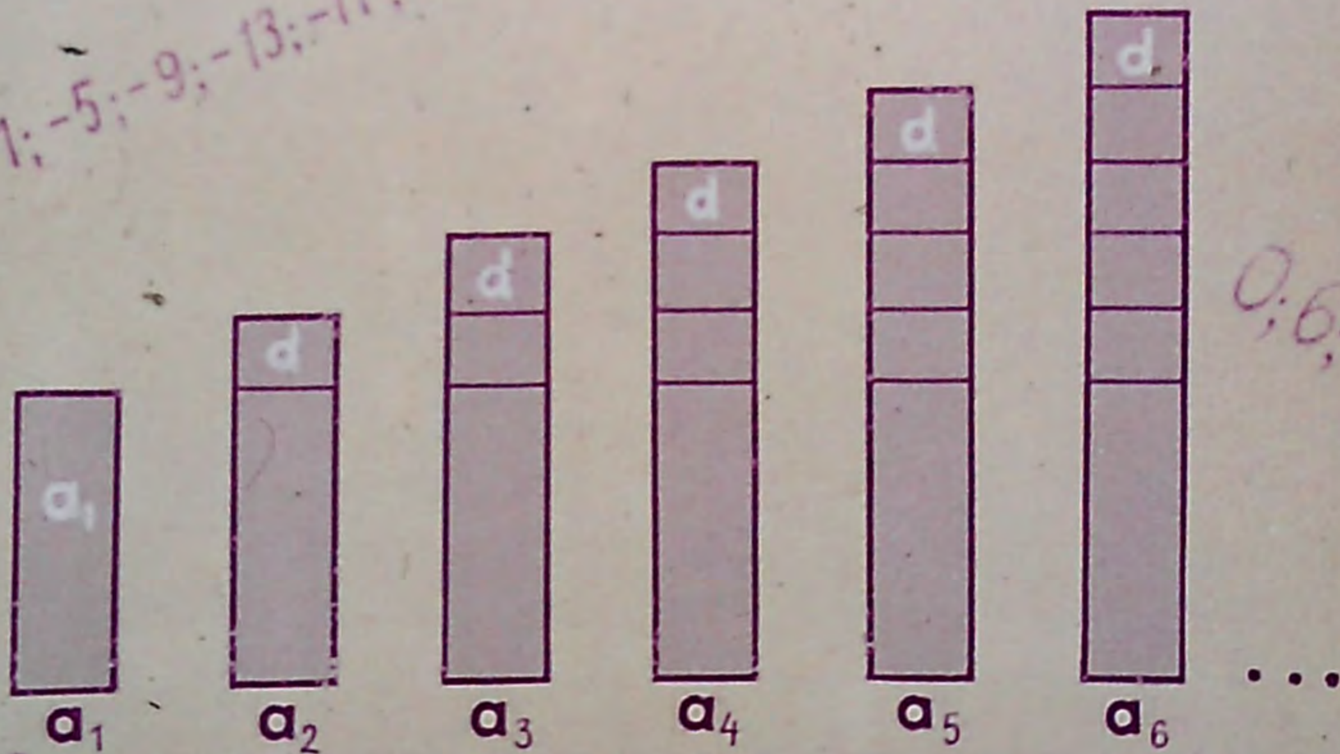
По принципу математической индукции $A(n)$ истинно при всех $n \in N$. $S_n = n^2$.

Определение:

(a_n)—арифметическая прогрессия, если $a_{n+1} = a_n + d$, где d—число, постоянное для данной (a_n).

Теорема: $a_n = a_1 + d\,(n-1)$.

7; 3; -1; -5; -9; -13; -17; ...



0; 6; 12;

10; 40

Укажите для этой теоремы $A(n)$, $A(1)$, $A(k)$, $A(k+1)$.

$a_1; a_1+d; a_2+d; a_3+d; a_4+d; \dots$

100; 103; 106; 109; 1...

Доказательство:

$A(n): a_n = a_1 + d(n-1)$

1. $a_1 = a_1 + d(1-1)$.
   $A(1)$ истинно.
2. Пусть $a_k = a_1 + d(k-1)$.
   Тогда

   $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k+1-1)$

   $(A(k)$ истинно$) \Longrightarrow$

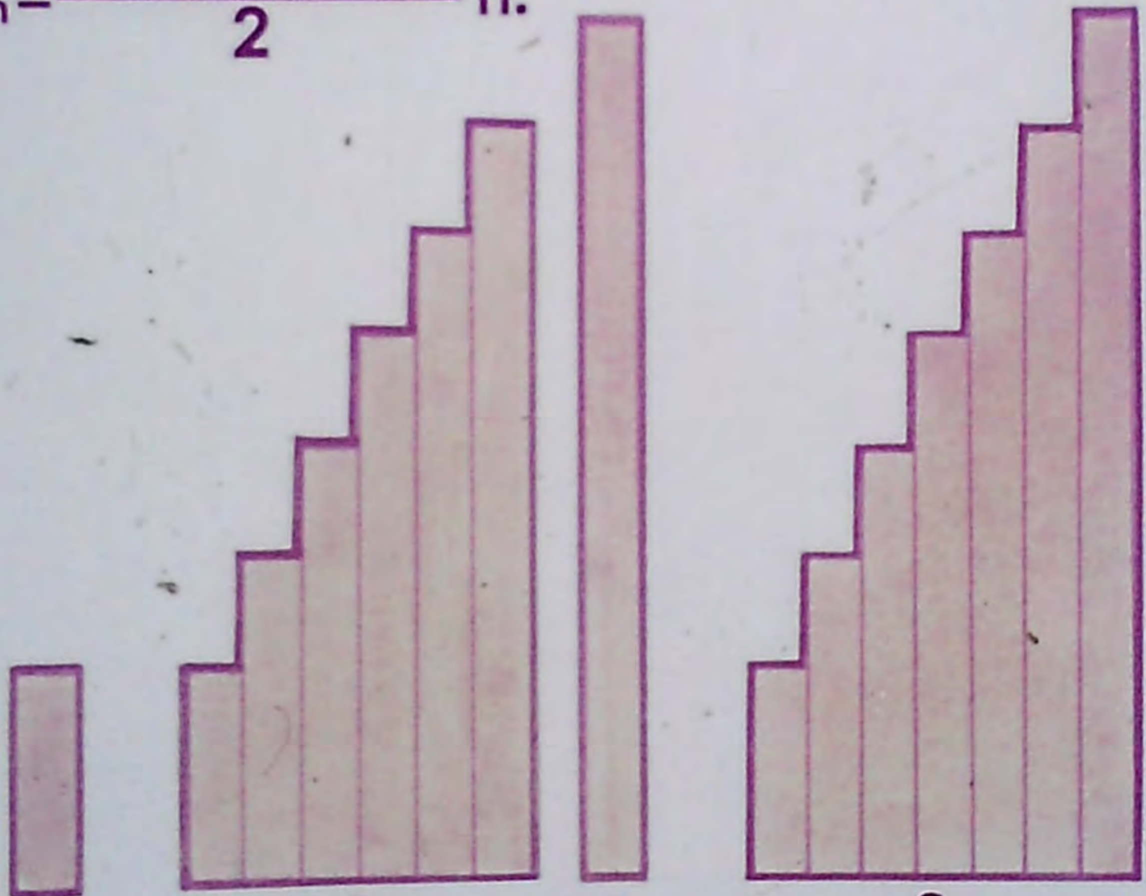
$\Longrightarrow (A(k+1)$ истинно$)$.

В силу принципа математической индукции $A(n)$ истинно.

Теорема:

Если (a_n) — арифметическая прогрессия, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\,n.$$



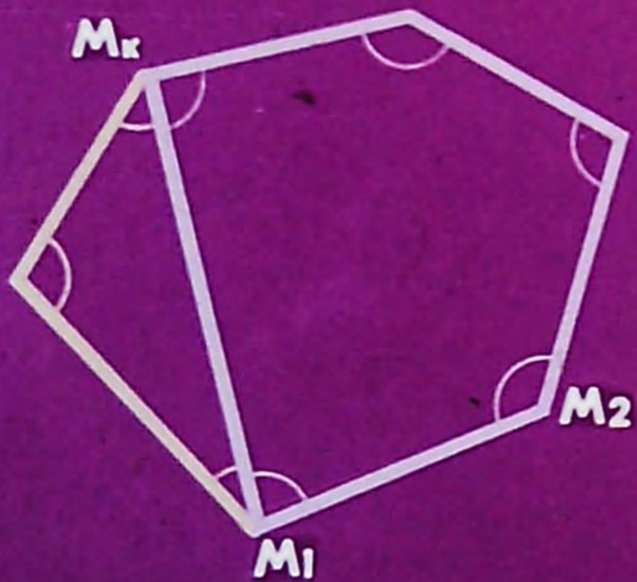
$S_1 = a_1$ $\qquad S_k \quad + \quad a_{k+1} \quad = \quad S_{k+1}$

Проведите доказательство.

Теорема:

Сумма величин внутренних углов n - угольника равна 180° (n—2).

$A(n)$: $S_n = 180°(n-2)$, где $n \geq 3$.



Доказательство:

1. $A(3)$:

$S_3 = 180° = 180°(3-2)$ — верно

2. Пусть $A(к)$ истинно:

$S_к = 180°(к-2)$.

Тогда

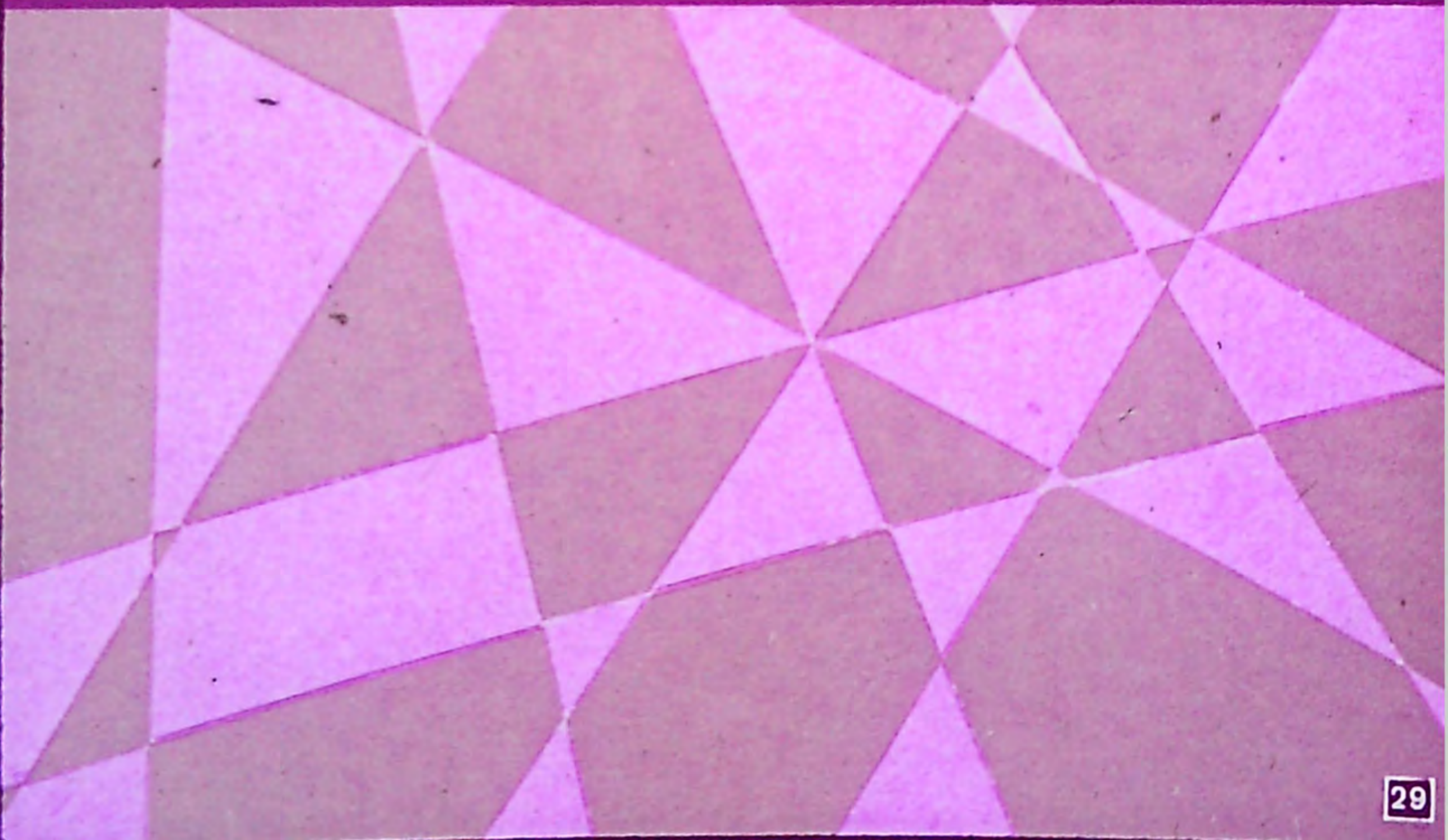
$S_{к+1} = S_к + 180° =$

$= 180°(к-2) + 180° = 180°(к+1-2)$.

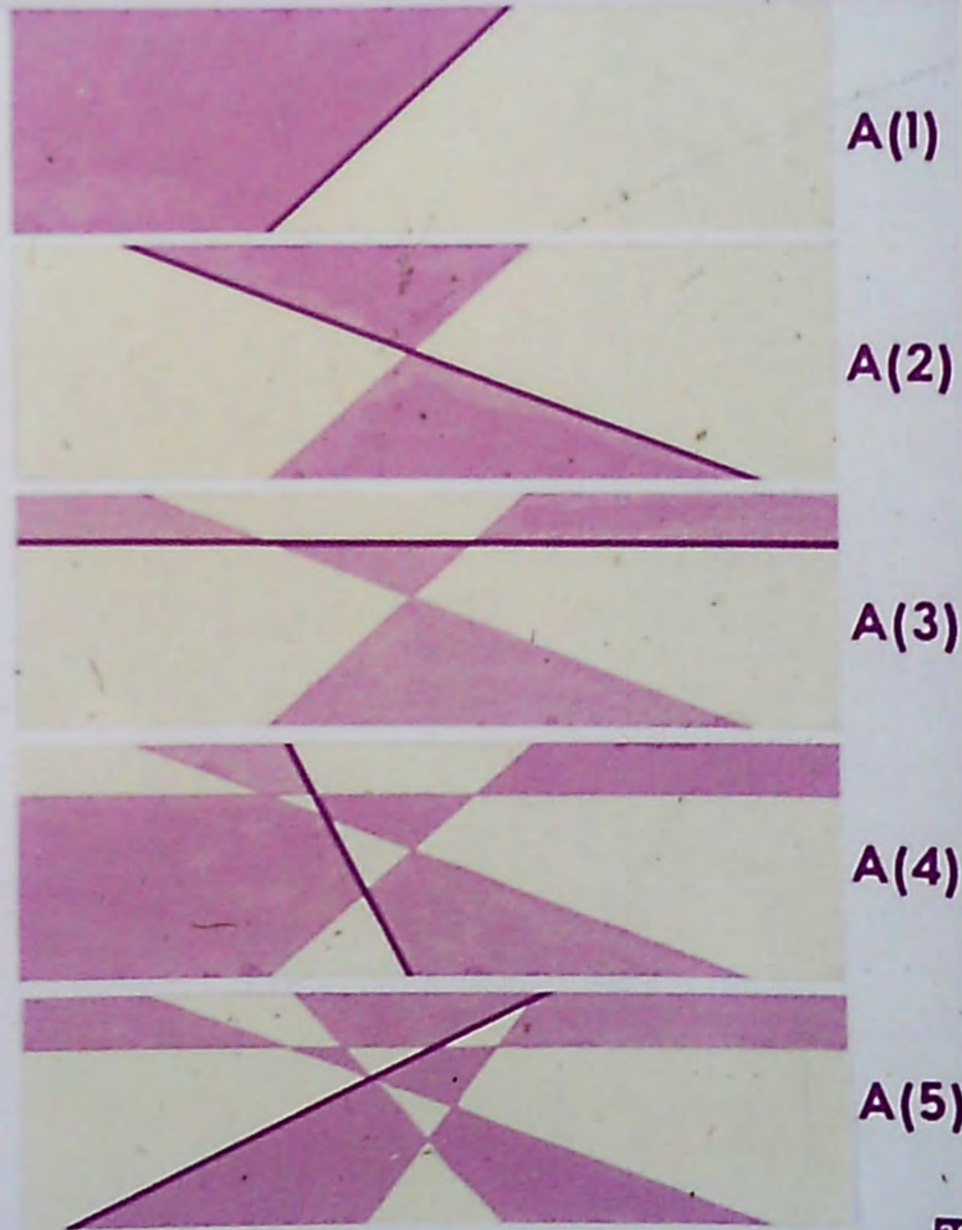
$A(к+1)$ истинно.

Докажите:

Области, на которые делится плоскость n прямыми линиями, можно раскрасить двумя красками так, что смежные области будут разного цвета.



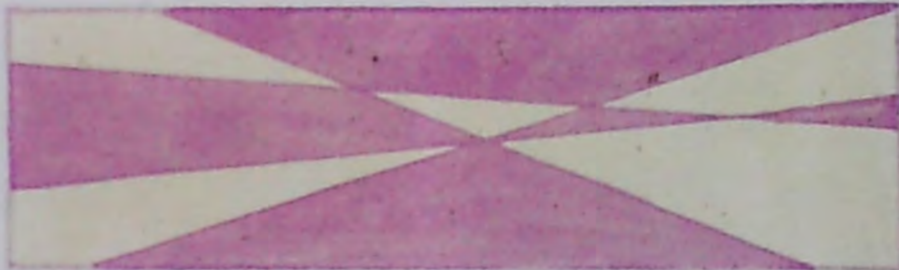
Попробуйте разобраться в принципе перехода от А(к) к А(к+1) и решить задачу.



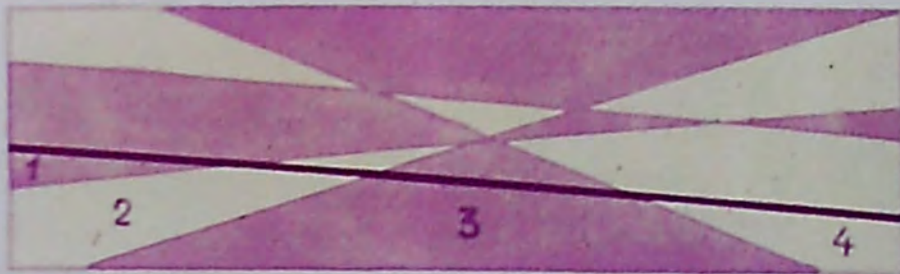
Решение:

1. А(1) истинно.

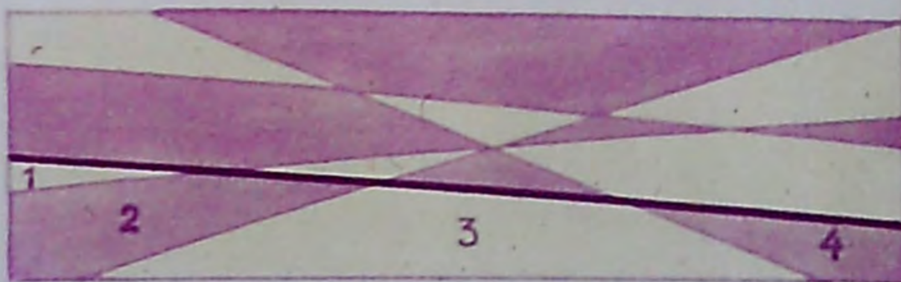
2. Пусть А(к) истинно.



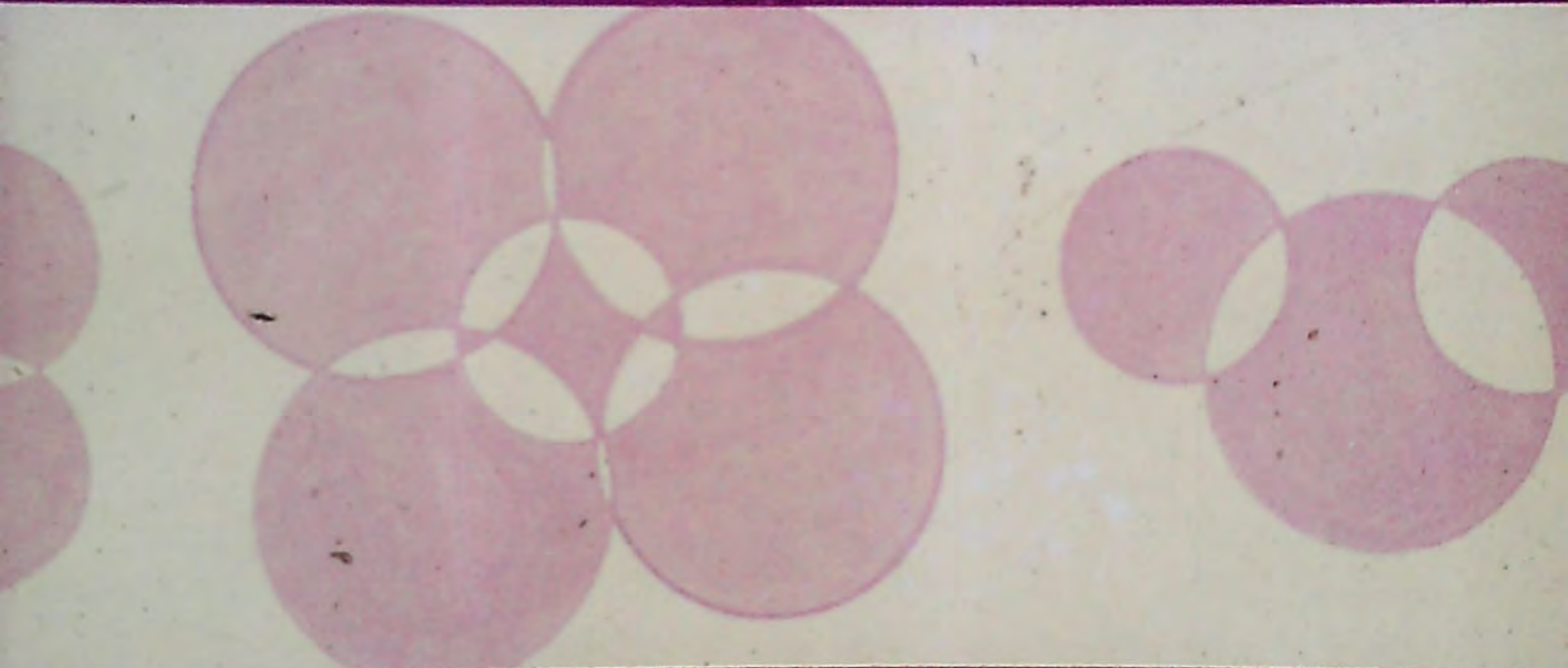
Проведем (к + 1)-ю прямую



и перекрасим все области с одной стороны от нее.
(А(к) истинно)⇒
⇒(А(к + 1) истинно).



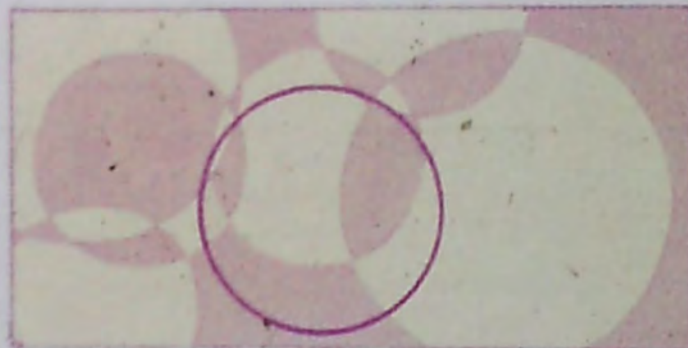
Докажите: **Области, на которые плоскость делится окружностями, можно раскрасить двумя цветами так, что смежные области будут закрашены по-разному.**



1

2

а



Воспользуйтесь при доказательстве этими рисунками.

б

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 9 класса
сделан по заказу Министерства просвещения СССР

Автор кандидат педагогических наук *Г. Левитас*
Художник *Н. Дунаева*
Художественный редактор *В. Дугин*
Редактор *В. Чернина*

Студия «Диафильм» Госкино СССР, 1978 г.
101000, Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Д-042-78 Цветной 0-30